Písemka C

3. února 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Uvažujme v tomto příkladu pouze reálné prostory.

   Nechť $K = [-1,1] \times [-1,1]$. Zjistěte, zdali formule
   $$Tf = \int_K xyf(x,y)\,dx\,dy$$
   definuje spojitý lineární funkcionál $T_1 \colon C(K) \to \mathbb{R}$, respektive $T_2 \colon L^\infty(K) \to \mathbb{R}$. Pokud tomu tak je, nalezněte jejich normy a zjistěte, zdali se jich nabývá.

2. (a) Zjistěte, zdali formule
   $$Tf(x) = if(x) + x^2 \int_0^1 f(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$
   definuje spojitý lineární operátor na $L^1([0,1])$.

   (b) Zjistěte, zdali je T kompaktní.

   (c) Nalezněte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.

3. Uvažujme $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Nechť $u_{1/x}$ je prvek $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definovaný jako
   $$u_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$
   Nechť 1 značí funkci rovnou jedné na $\mathbb{R}$, δ_0 je Diracova míra v bodě 0 a $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Ukažte, že $gu_{\delta_0} = 0$ a $gu_{1/x} = u_1$.

   (b) Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a $\alpha, \beta \colon X \to \mathbb{C}$ jsou lineární zobrazení. Ukažte, že $\beta \in \operatorname{span}\{\alpha\}$ právě tehdy, když $\operatorname{Ker}\alpha \subset \operatorname{Ker}\beta$.

   (c) Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňuje $\varphi(0) = 0$. Ukažte, že funkce $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, je v $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $\varphi(x) = x\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Ukažte pomocí (b) a (c), že splňuje-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ rovnost $gu = 0$, je $u \in \operatorname{span}\{u_{\delta_0}\}$.

   (e) Ukažte pomocí (a) a (d) že splňuje-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ rovnici $gu = u_1$, je $u \in u_{1/x} + \operatorname{span}\{u_{\delta_0}\}$.