Príklad B1

$$T_1 : L^1([0,1]) \to c_0 \qquad T_1 f(n) = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t) e^{int}\,dt$$

• T_1 je do c_0:

$$\left| \frac{1}{n}\int_0^1 f(t) e^{int}\,dt \right| \le \frac{1}{n}\int_0^1 |f(t)e^{int}|\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 |f(t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{n}\|f\|_1 \longrightarrow 0$$

linearita je snadná z definice a z linearity integrálu.

$$\|T_1 f\| \le \sup_n \left(\frac{1}{n}\|f\|_1\right) \le \|f\|_1 \quad \Rightarrow \|T_1\| \le 1$$

• $T_1' : (c_0)^* \to (L^1([0,1]))^*$

$c_0^* \approx \ell^1$, $L^1([0,1])^* \approx L^\infty([0,1])$ dle Věty z oddílu II.4

Reprezentujeme T_1' jako operátor z ℓ^1 do $L^\infty([0,1])$:

$(x_n) \in \ell^1$, $f \in L^1([0,1])$

$$T_1'((x_n))(f) = (x_n)(T_1 f) = (x_n)\left(\left(\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)e^{int}\,dt\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}\int_0^1 f(t)e^{int}\,dt = \int_0^1 f(t)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}e^{int}\right)dt$$

Lebesgueova věta: $\left|f(t)\cdot\sum \frac{x_n}{n}e^{int}\right| \le$

$$\le |f(t)|\cdot\sum\frac{|x_n|}{n} \in L^1$$

Tedy $T_1'((x_n))$ je funkcionál na $L^1([0,1])$ reprezentovaný

funkcí $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}e^{int} \in L^\infty([0,1])$)

(řada konv. stejnoměrně)

V tomto smyslu $T_1'((x_n))\cancel{(t)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}e^{int}$, $t \in [0,1]$, $(x_n) \in \ell^1$

$T_2 : L^2([0,1]) \to \ell^2$, $T_2 f(n) = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) e^{int}$

• T_2 je do ℓ^2:

$$|T_2 f(n)| = \left| \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) e^{int} dt \right| \le \frac{1}{n} \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

$$\le \frac{1}{n} \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 1^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{n} \|f\|_2$$

Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_2 f(n)|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|f\|_2^2 = \frac{\pi^2}{6} \cdot \|f\|_2^2$$

Teda $T_2 f \in \ell^2$, $\|T_2 f\|_2 \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|f\|_2$

Pretože T_2 je zrejme lineárny, $\|T_2\|_2 \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, T_2 je spojitý lin. op.

• $T_2^* : \ell^2 \to L^2([0,1])$

$(x_n) \in \ell^2$, $f \in L^2([0,1])$

$$\langle T_2^*((x_n)), f \rangle = \langle (x_n), T_2 f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{T_2 f(n)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 \overline{f(t)}\, e^{-int} dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \overline{f(t)} \cdot e^{-int} dt =$$

Leb. veta, $\sum \left| \frac{x_n}{n} \overline{f(t)} e^{-int} \right| \le$

$\le |f(t)| \cdot \|(x_n)\|_{\ell_2} \|(\frac{1}{n})\|_{\ell_2}$, a to

je v $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$

$$= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} e^{-int}, f \right\rangle \Rightarrow T_2^*((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} e^{-int}$$

Táto funkcia je v $L^2([0,1])$, ona je dokonca v $L^\infty([0,1])$

Příklad B2: $X = \ell^2(\mathbb{Z})$

$$Tx(n) = i^n x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \; x \in X$$

(a) $T \in \mathcal{L}(X)$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |T(x)(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |i^n x(n-1)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n-1)|^2 =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2 = \|x\|_2^2$$

$\Rightarrow$ Pro $x \in X$ je $Tx \in X$, $\|Tx\| = \|x\|$

T je zjevně lineární, proto $T \in \mathcal{L}(X)$, $\|T\| \leq 1$

(b) Výše jsme ukázali: $\|Tx\| = \|x\|$, T je tedy izometrie.

Navíc je na: $y \in X \Rightarrow$ ex. $x \in X$ $Tx = y$

$$y(n) = i^n x(n-1)$$
$$\Leftrightarrow x(n-1) = (-i)^n y(n)$$
$$\Leftrightarrow x(n) = (-i)^{n+1} y(n+1) \quad , \; \|x\| = \|y\| \text{ podle (a)}.$$

$$T^{-1}(y)(n) = (-i)^{n+1} \cdot y(n+1).$$

(c) T není kompaktní: dle (b) je $T(B_X) = B_X$, X je nekonečno-dimenze, tedy B_X není kompaktní.

(d) $S \in \mathcal{L}(X)$ invertovatelný, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow (\lambda \in \sigma(S) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(S^{-1}))$

$\lambda \notin \sigma(S) \Rightarrow (\lambda I - S)$ je invertovatelný. Označme T inverzi

$$(\lambda I - S)T = T(\lambda I - S) = I$$

$$I = (\lambda I - S)T = (\lambda S^{-1}S - S)T = (\lambda S^{-1} - I)ST =$$
$$= (S^{-1} - \lambda^{-1} I)\lambda ST$$

Podobně $\lambda TS(S^{-1} - \lambda^{-1} I) = T(\lambda I - S) = I$

$\Rightarrow S^{-1} - \lambda^{-1} I$ má levou i pravou inverzi, je tedy invertovatelný

$\left(T_1 U = U T_2 = I \Rightarrow T_1 = T_2 \right.$

$\left. \quad [\, T_1 = T_1 I = T_1 U T_2 = I T_2 = T_2 \,] \right)$

tedy $\lambda^{-1} \notin \sigma(S^{-1})$

Protože $(S^{-1})^{-1} = S$, platí i druhá implikace

(e) $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$:

$\|T\| = 1 \Rightarrow \sigma(T) \subset B(0,1)$
$\|T^{-1}\| = 1 \Rightarrow \sigma(T^{-1}) \subset B(0,1) \overset{(a)}{\Rightarrow} \sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus U(0,1)$

Dohromady $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$

$\sigma_p(T)$: $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ $\qquad Tx = \lambda x$

$i^n x(n-1) = \lambda \cdot x(n) \Rightarrow x(n) = \frac{i^n}{\lambda} x(n-1)$

speciálně platí $|x(n)| = |x(n-1)|$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.
To splňuje pouze 0
$\Rightarrow \sigma_p(T) = \emptyset$

kdy je $\lambda I - T$ na: $\quad \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$

$y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ – hledáme $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\lambda x - Tx = y$

$\lambda x(n) - i^n x(n-1) = y(n)$, $n \in \mathbb{Z}$

$x(n) = \frac{1}{\lambda} y(n) + \frac{i^n}{\lambda} x(n-1)$

například zvol: $y(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$\Rightarrow x(n) = \frac{i^n}{\lambda} x(n-1)$ pro $n < 0$
$\Rightarrow |x(n)| = |x(n-1)|$ pro $n < 0$ $\Rightarrow x(n) = 0$ pro $n < 0$

Dále, $x(0) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i^n}{\lambda} x(-1) = \frac{1}{\lambda}$; pro $n > 0$ je $x(n) = \frac{i^n}{\lambda} x(n-1)$

$\Rightarrow$ pro $n > 0$ je $|x(n)| = |x(n-1)|$, tedy $|x(n)| = \left|\frac{1}{\lambda}\right| = 1$ pro $n \geq 0$. Takový prvek není v $\ell^2(\mathbb{Z})$

Příklad B3 Nechť $X = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(a) $c_n \to 0$ v $\mathbb{C}$, $u_n \to u$ v X $\Rightarrow$ $c_n u_n \to 0$ v X:

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow (c_n u_n)(\varphi) = \underbrace{c_n}_{\to 0} \cdot \underbrace{u_n(\varphi)}_{\to u(\varphi)} \longrightarrow 0 \cdot u(\varphi) = 0$$

(b) $F \subset\subset X$ uzavřený vzhledem ke konvergenci, $t \in X \Rightarrow \operatorname{span}(F \cup \{t\})$ uzavřený též

Stačí pro případ $t \notin F$

$u_n \in \operatorname{span}(F \cup \{t\})$, $u_n \to u \in X$. Chceme ukázat $u \in \operatorname{span}(F \cup \{t\})$

$u_n = v_n + c_n t$ pro nějaké $v_n \in F$, $c_n \in \mathbb{C}$

Je-li (c_n) omezená, lze vybrat konvergentní $c_{n_k} \to c$

Pak $c_{n_k} - c \to 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} (c_{n_k} - c)t \to 0 \Rightarrow c_{n_k} t \to ct$

Pak $v_{n_k} = u_{n_k} - c_{n_k} t \to u - ct$ a přitom do F (protože $v_{n_k} \in F$)

a tedy $u = (u - ct) + ct \in \operatorname{span}(F \cup \{t\})$

Není-li c_n omezená, lze vybrat podposloupnost, že $|c_{n_k}| \to \infty$

Pak $\frac{1}{c_{n_k}} \to 0 \Rightarrow$ dle (a) je $\frac{1}{c_{n_k}} u_{n_k} \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow t + \frac{1}{c_{n_k}} v_{n_k} \to 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{c_{n_k}} v_{n_k}}_{\in F} \longrightarrow -t \quad \Rightarrow -t \in F \Rightarrow t \in F$$

(c) indukcí dle dimenze (pro $\{0\}$ triviální, indukční krok přes (b))

Vidíme, že $F \subset\subset X$ konečné dimenze $\Rightarrow F$ uzavřený vůči konvergenci.

(d) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ řeší rovnici $u'' + u = 0$

(h_j) aproximativní jednotka, $u_j := u * h_j$.

Platí: $u_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u_j'' = u'' * h_j$

$$\Rightarrow u_j'' + u_j = (u'' * h_j + u * h_j = (u'' + u) * h_j =$$

$$= 0 * h_j = 0$$

(e) Nechť u splňuje $u'' + u = 0$.

Vezměme $u_j = u * h_j \overset{(d)}{\Rightarrow} u_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u_j'' + u_j = 0$.

tedy $u_j \in \operatorname{span}\{\cos, \sin\}$

navíc $\Lambda_{u_j} \to u$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$\overset{(c)}{\Rightarrow} u = \alpha \cdot \Lambda_{\cos} + \beta \cdot \Lambda_{\sin}$.