Písemka B

27. ledna 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Zjistěte, zdali formule

$$\{(Tf)(n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)e^{int}\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

   definuje spojitý lineární operátor $T_1\colon L^1([0,1]) \to c_0$, respektive $T_2\colon L^2([0,1]) \to \ell^2$. Pokud tomu tak je, nalezněte duální operátor T_1' příslušný T_1 v rámci standardní duality a adjungovaný operátor T_2^* k T_2.

2. Nechť $X = \ell^2(\mathbb{Z})$ a

$$Tx(n) = \{i^n x(n-1)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X.$$

   (a) Zjistěte, zdali T definuje prvek $L(X)$.

   (b) Vyzkoumejte, zda se jedná o surjektivní izometrii.

   (c) Zjistěte, zdali je T kompaktní.

   (d) Ukažte, že je-li Y Banachův prostor a $S \in L(Y)$ invertovatelný operátor, pak pro nenulové komplexní číslo λ platí, že $\lambda \in \sigma(S)$ právě tehdy, když $\lambda^{-1} \in \sigma(S^{-1})$.

   (e) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$. (Pro určení $\sigma(T)$ uvažte prvek $y(n) = \chi_{\{0\}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.)

3. Nechť $X = \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

   (a) Nechť $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ konverguje k 0 a $\{u_n\} \subset X$ konverguje v X k nějakému $u \in X$. Ukažte, že $c_n u_n \to 0$ ve X.

   (b) Ukažte pomocí (a), že je-li F podprostor X uzavřený vzhledem ke konvergenci v X a $x \in X$, je $\operatorname{span}(F \cup \{x\})$ uzavřený v X vzhledem ke konvergenci v X. (Množina $A \subset X$ je uzavřená vzhledem ke konvergenci v X, pokud $x \in A$, kdykoliv existuje posloupnost $\{x_n\} \subset A$ konvergující v X k x.)

   (c) Ukažte, že každý konečně dimenzionální podprostor X je uzavřený vzhledem ke konvergenci v X.

   (d) Nechť $\{h_j\}$ je aproximativní jednotka a nechť $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ řeší rovnici $u'' + u = 0$. Ukažte, že funkce $u_j = u * h_j$ též splňují tuto rovnici.

   (e) Použitím (c) a (d) popište všechna $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ splňující rovnici $u'' + u = 0$.