

Výpočet inverzní matice

Metoda: Nechť \mathbb{A} je čtvercová matice řádu n .

- Inverzní matice k \mathbb{A} existuje, právě když \mathbb{A} má hodnost n (Věta VI.7).
- Pokud má \mathbb{A} hodnost n , lze nějakou transformací převést na jednotkovou matici (viz jeden z kroků důkazu Věty VI.7). Pokud tutéž transformaci aplikujeme na \mathbb{I} , dostaneme \mathbb{A}^{-1} (viz další krok důkazu Věty VI.7).
- Z těchto úvah dostáváme následující algoritmus pro výpočet inverzní matice:
 1. Napíšeme si matici $(\mathbb{A}|\mathbb{I})$ typu $n \times 2n$. Na tu budeme provádět řádkové úpravy. Tím zabezpečíme, abychom tytéž úpravy provedli na \mathbb{A} i na \mathbb{I} .
 2. Pomocí řádkových úprav převedeme uvedenou matici na tvar $(\mathbb{S}|\mathbb{B})$, kde \mathbb{S} je schodovitá (algoritmus známe).
 3. Pokud má \mathbb{S} nějaký řádek nulový, je $h(\mathbb{A}) < n$, tedy \mathbb{A} není regulární a inverzní matice neexistuje. (A máme hotovo.)
 4. Pokud má \mathbb{S} všechny řádky nenulové, je $h(\mathbb{A}) = n$ a inverzní matice existuje. V tom případě provádíme dále řádkové úpravy, abychom dostali matici tvaru $(\mathbb{I}|\mathbb{C})$. Algoritmus pro to byl popsán v důkazu Věty VI.7.
 5. Platí $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{C}$.
- Jiná možnost by byla používat sloupcové úpravy na matici $\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix}$.

Příklad 15 ze supersemináře

První matice: Začneme rovnou počítat:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -9 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -4 & 18 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 16 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -2 & 15 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -9 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -4 & | & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 & -2 & | & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & | & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 & -2 & | & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & | & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 24 & -4 & | & 9 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 & -2 & | & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 24 & -4 & | & 9 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & | & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 2 & | & -4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & | & \frac{9}{4} & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 0 & | & -3 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & | & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

inverzní matice

Při výpočtu jsme opět algoritmus trochu upravili, abychom si ušetřili práci se zlomky.

Druhá matice: Opět začneme rovnou počítat:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 4 & 28 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 7x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -112 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 7x - 98 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7x - 14 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 7x - 98 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7x - 14 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 84x + 56 & 26 & -11 & 0 & 12 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{.1/4} \\ \xrightarrow{.1/7} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7x - 14 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 84 + 56x & 26 & -11 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

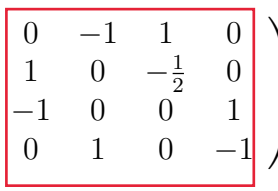
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7x - 14 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 21x + 14 & \frac{13}{2} & -\frac{11}{4} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & x + 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{2} & -\frac{11}{4} & -3x - 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & x & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & x + 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{2} & -\frac{11}{4} & -3x - 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{array} \right) \leftarrow \text{inverzní matice}$$

Třetí matice: Opět začneme rovnou počítat:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1/2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1
 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1
 \end{array} \right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$



 inverzní matice