

I. NAJDĚTE VŠECHNA ŘEŠENÍ DIFERENČNÍCH ROVNIC (S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI)

1. $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0$ 2. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$
3. $y(n+2) - 6y(n+1) + 13y(n) = 0, y(1) = 0$
4. $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0, y(1) = 2, y(2) = 1$
5. $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0, y(1) = y(2) = 1$ 6. $y(n+4) + 6y(n+2) + 9y(n) = 0$
7. $y(n+4) - y(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$ 8. $y(n+4) + y(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$ 9. $y(n+2) - y(n+1) + y(n) = \sin \frac{n\pi}{3}$
10. $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \cos n$ 11. $y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n + 2^n$
12. $y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = \sin n + \sin 2n$ 13. $8y(n+3) + y(n) = 3n + 1/2^n$
14. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2, y(1) = 3, y(2) = 2.$
15. $y(n+2) - y(n) = 17, y(1) = y(2) = 0.$

- VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. $y(n) = (a+bn) \cdot (-2)^n$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 2. $y(n) = a + b \cdot 2^n$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 3. $y(n) = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{13})^n \cdot (2 \cos(n \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}) - 3 \sin(n \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}))$ ($a \in \mathbf{R}$) 4. $y(n) = \frac{1}{4}(3^n - 5 \cdot (-1)^n)$
5. $y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ 6. $(\sqrt{3})^n ((a+bn) \cos \frac{n\pi}{2} + (c+dn) \sin \frac{n\pi}{2})$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 7. $y(n) = \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{4} + a + b \cdot (-1)^n + c \cos \frac{n\pi}{2} + d \sin \frac{n\pi}{2}$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 8. $y(n) = -\frac{1}{4}n \sin \frac{n\pi}{4} + a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4} + c \cos \frac{3n\pi}{4} + d \sin \frac{3n\pi}{4}$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 9. $y(n) = -n(\frac{\sqrt{3}}{6} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3}) + a \cos \frac{n\pi}{3} + b \sin \frac{n\pi}{3}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 10. $y(n) = \frac{2 \sin^2 1 \cos 1 - 1 - \cos 1}{8 \sin^2 1 \cos 1 - 1 - 4 \sin^2 1 - \cos 1} \cos n + \frac{\sin^3 1}{8 \sin^2 1 \cos 1 - 1 - 4 \sin^2 1 - \cos 1} \sin n + (\sqrt{2})^n (a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4})$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 11. $y(n) = 2^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + a + b(\sqrt{2})^n + c(-\sqrt{2})^n$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 12. $y(n) = \frac{1}{2}(\frac{3 \cos 1 + 3 + 4 \sin^2 1 \cos 1}{9 + 6 \sin^2 1 + 9 \cos 1 + 8 \sin^2 1 \cos 1} \sin n - \frac{\sin 1(4 \sin^2 1 + 5)}{9 + 6 \sin^2 1 + 9 \cos 1 + 8 \sin^2 1 \cos 1} \cos n) + \frac{1}{2}(\frac{3 \cos 2 + 3 + 4 \sin^2 2 \cos 2}{9 + 6 \sin^2 2 + 9 \cos 2 + 8 \sin^2 2 \cos 2} \sin 2n - \frac{\sin 2(4 \sin^2 2 + 5)}{9 + 6 \sin^2 2 + 9 \cos 2 + 8 \sin^2 2 \cos 2} \cos 2n) + a \cdot (-1)^n + b \cdot (-2)^n$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 13. $y(n) = \frac{1}{3}n - \frac{8}{9} + \frac{1}{2^{n+1}} + a \cdot (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2^n}(b \cos \frac{n\pi}{3} + c \sin \frac{n\pi}{3})$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 14. $y(n) = 5 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{13}{6}n + 1$ 15. $y(n) = \frac{17}{2}n - \frac{17}{4} \cdot (-1)^n - \frac{51}{4}$

II. ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

1. Nalezněte maximální řešení rovnice $y' = y$ procházející bodem $[0, 1]$.
2. Pro diferenciální rovnici $yy' + xy^2 = x$ nalezněte
 - (a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[1, 0]$.
3. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
 - (a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[1, \frac{1}{2}]$,
 - (c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.
4. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
 - (a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[0, 1]$.
5. Nalezněte řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$, které splňuje $y(-2) = -\frac{3}{5}$ a $y(0) = 1$.
6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v \mathbb{R}^2 , kterými prochází právě jedno řešení definované na celém \mathbb{R} .
7. Řešte rovnici $y'(2 - e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = A?$$

NAJDĚTE VŠECHNA MAXIMÁLNÍ ŘEŠENÍ NÁSLEDUJÍCÍCH ROVNIC

8. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ 9. $xy' + y = y^2$ 10. $y' = 10^{x+y}$ 11. $e^{-y}(1+y) = 1$
12. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0, x \in (-1, 1)$ (*na zbylých intervalech) 13. $y' \sin x = y \ln y, y(\frac{\pi}{2}) = 1$
14. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$ 15. $y - xy' = b(1 + x^2 y'), y(1) = 1$ ($b \in \mathbf{R}$)

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. **2.** (a) singulární řešení $y_0^1 = 1$ na \mathbb{R} , $y_0^2 = -1$ na \mathbb{R} ; $y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na \mathbb{R} , $y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na \mathbb{R} ; $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^3(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$, $y_c^4(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$ pro $c > 1$; $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na \mathbb{R} a $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na \mathbb{R} pro $c < 0$ a $c \in (0, 1)$. (b) Takové řešení neexistuje. **3.** (a) $y_0^1 = 0$ na $(0, +\infty)$, $y_0^1 = 0$ na $(-\infty, 0)$; další řešení dána vzorečkem $y_c^j(x) = \frac{x}{1-cx}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j = 1, 2, 3$ definována na intervalech: pro $c > 0$ y_c^1 na $(-\infty, 0)$, y_c^2 na $(0, \frac{1}{c})$, y_c^3 na $(\frac{1}{c}, +\infty)$; pro $c < 0$ y_c^1 na $(-\infty, \frac{1}{c})$, y_c^2 na $(\frac{1}{c}, 0)$, y_c^3 na $(0, +\infty)$. (b) $y_{-1}^3(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (0, \infty)$. (c) Omezená jsou y_0^1, y_0^2, y_c^1 pro $c > 0$, y_c^3 pro $c < 0$. **4.** (a) $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$, $x \in (\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$, $y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1})$ pro $c \geq \frac{\pi}{2}$; $y_c(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1})$. **5.** Takové řešení neexistuje. Všechna

maximální řešení jsou: $y_s = 0$ na \mathbb{R} ; $y_{s,c} = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (c, +\infty) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$; $y_{c,s} =$

$$\begin{cases} 0 & x \in (c, +\infty] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \end{cases} \text{ pro } c \in \mathbb{R};$$

$$y_{c,d} = \begin{cases} (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, d] \\ (\frac{3}{5}(x-d))^{\frac{5}{3}} & x \in (d, +\infty) \end{cases} \text{ pro } c, d \in \mathbb{R}, c \leq d. \quad \mathbf{6.} \quad y_c = \log(\sin x + c), x \in \mathbb{R}, \text{ pro } c > 1;$$

$$y_c^k = \log(\sin x + c), x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k+1)\pi + \arcsin c), k \in \mathbb{Z}, \text{ pro } c \in (-1, 1]; \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}. \quad \mathbf{7.} \quad y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(b(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$$

pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi, \pi)$. **8.** $y_c = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in \mathbb{R}$,

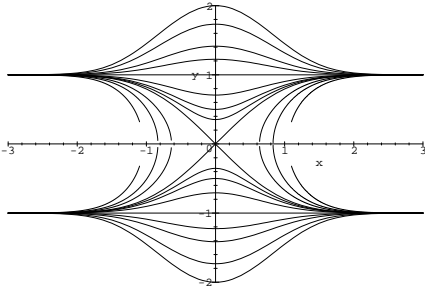
pro $c < -\frac{1}{4}$; $y_{-1/4}^{1,2} = -\sqrt[3]{3} \cdot (x - \frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; $y_c^{1,2,3} = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \infty)$, pro $c > -\frac{1}{4}$. **9.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = \frac{1}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **10.** $y_c = -\log_{10}(c - 10^x)$, $x \in (-\infty, \log_{10} c)$, pro $c > 0$. **11.** $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^1 = -\log(1 + e^{x-c})$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$; $y_c^2 = -\log(1 - e^{x-c})$, $x \in (-\infty, -c)$, pro $c \in \mathbb{R}$. **12.**

$$y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1, x \in (-1, 1); y_{\frac{\pi}{2}} = 1, x \in (-1, 1); y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$$

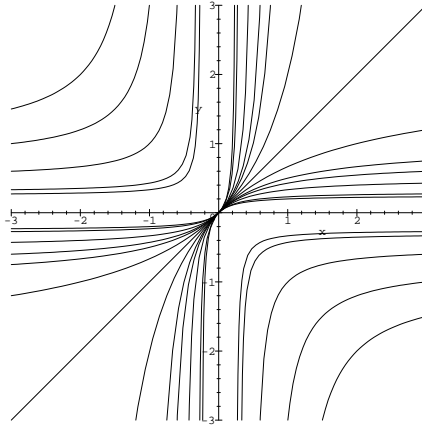
$$\text{pro } c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}); y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}, \text{ pro } c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y_{-\frac{\pi}{2}} = -x,$$

$x \in (-1, 1)$. **13.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^k = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0 . **14.** $y_0 = x$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty^{1,2} = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y_c^{1,2} = \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1 . **15.** Pro $b = 0$: $y_c = cx$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1 . Pro $b \neq 0$: $y_0 = b$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = b + \frac{cx}{1+bx}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$ nebo $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0 , pokud $b = 1$; neexistuje, pokud $b = -1$; $y_{\frac{1-b}{1+b}}^1$, pokud $b < -1$; $y_{\frac{1-b}{1+b}}^2$, pokud $b \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

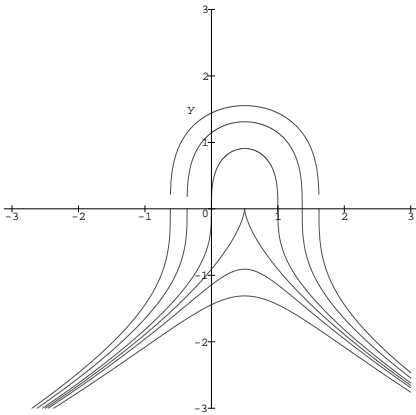
2.



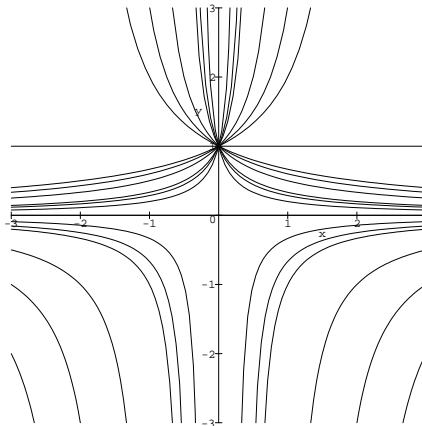
3.



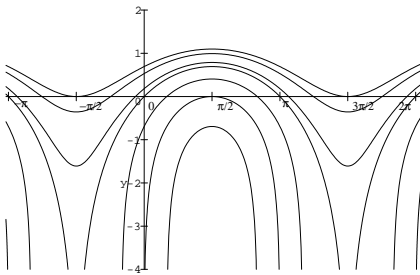
8.



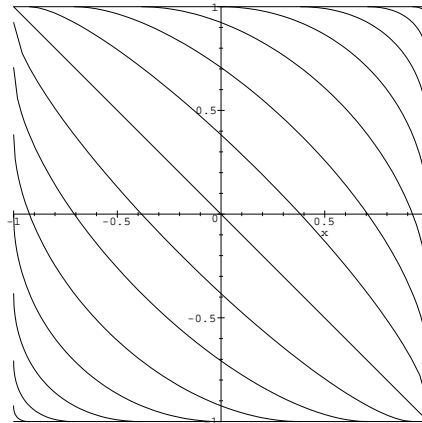
9.



6.



12.



III. NĚKTERÉ TYPY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC,

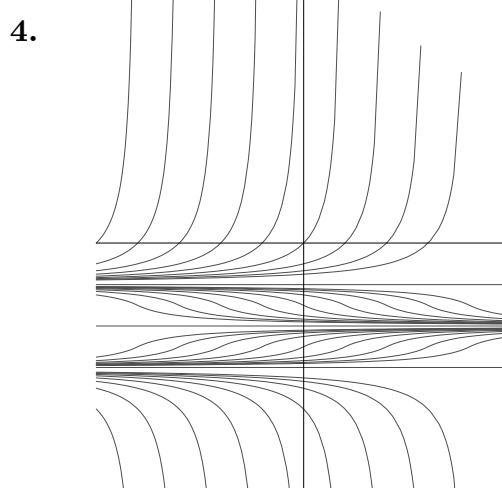
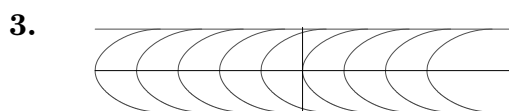
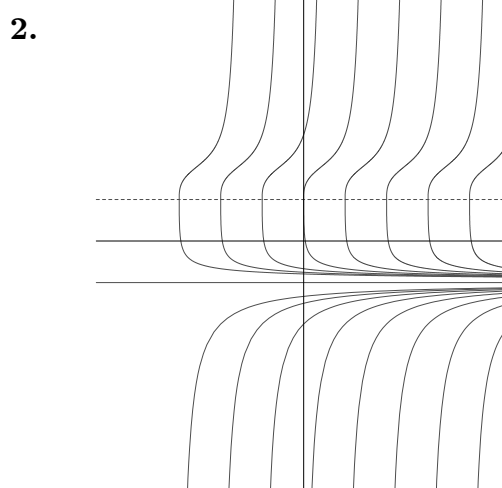
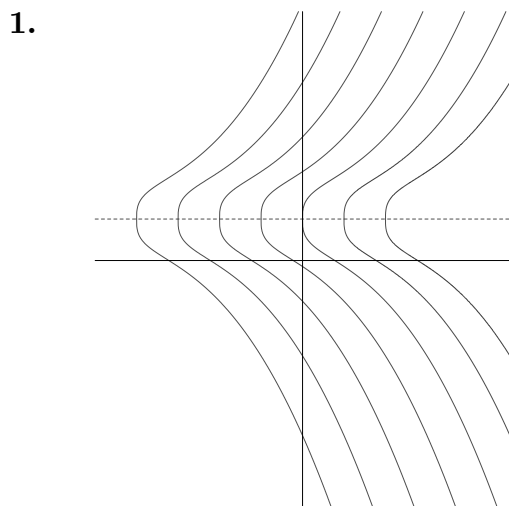
KTERÉ LZE PŘEVÉST NA ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

1. $y' = \cos(x - y)$ 2. $y' = \sin(x + y)$ 3. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ 4. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 5. $xy' = y \log \frac{y}{x}$
 6. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ 7. $y^2 + x^2 y' = xy y'$ 8. $xy' - y = \sqrt{y^2 + x^2}$ 9. $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$ 10. $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$
 11. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ 12. $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$

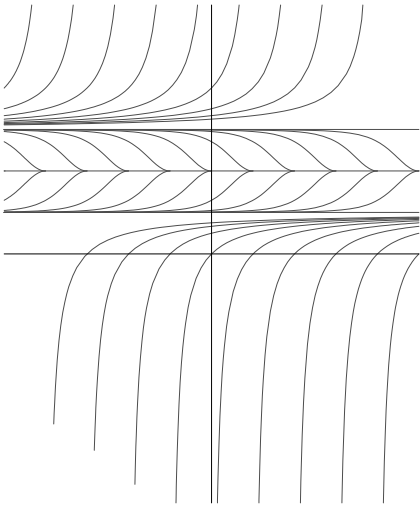
VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** Substituce $y = x - z$; řešení $y(x) = x - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$); $y(x) = x - 2 \operatorname{arccotg}(-x - c) - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$). **2.** Substituce $y = z - x$; řešení $y(x) = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$), $y(x) = \begin{cases} -x - 2 \operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) + 2k\pi & x \in (-\infty, c) \\ -x + \pi + 2k\pi & x = -c \\ -x - 2 \operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) + 2\pi + 2k\pi & x \in (-c, \infty) \end{cases}$ ($c \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$). V příkladech **3.-8.** použijte substituci $y = xz$. **3.** $y(x) = -x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = 2x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = x \frac{2+kx^3}{1-kx^3}$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \infty)$ pro $k > 0$ a na intervalech $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, 0)$ nebo $(0, \infty)$ pro $k < 0$. **4.** $y(x) = x\sqrt{2(\log|x| + c)}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞) ; $y(x) = -x\sqrt{2(\log|x| + c)}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞) . **5.** $y(x) = ex$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = xe^{1+kx}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **6.** $y(x) = -x \log(-\log|x| - c)$, $x \in (-e^{-c}, 0)$ nebo $x \in (0, e^{-c})$ ($c \in \mathbf{R}$). **7.** $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = kx^2$, $x \in (-\infty, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **8.** $y(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2k}$, $x \in (0, \infty)$ ($k > 0$); $y(x) = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k}x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ ($k > 0$). **9.-11.** substitucí $x = t + a$, $y = z + b$ pro vhodná a, b převést na předchozí typ. **12.** substitucí $y^2 = z$ převést na předchozí typ.

IV. NAČRTNĚTE GRAF ŘEŠENÍ, ANIŽ EXPLICITNĚ VYŘEŠÍTE ROVNICI

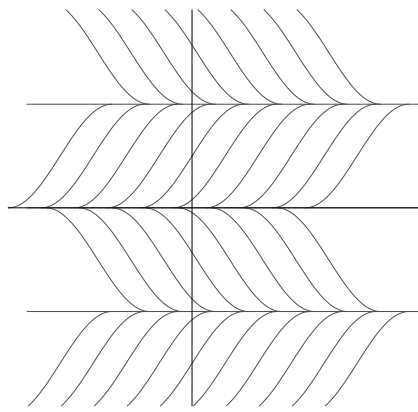
- 1.** $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$ **2.** $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$ **3.** $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$ **4.** $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$
5. $y' = (y-1)^2\sqrt[3]{y-2}(y-3)$ **6.** $y' = \sqrt[3]{\sin y}$ **7.** $y' = \sqrt{|\cos y|}$ **8.** $y' = \sin^2 y$
9. $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$ **10.** $y' = \sqrt{e^{|y|} - 1} \cdot e^y \cdot (y-1)$ **11.** $y' = \log(1 - \sqrt[3]{y}) \cdot \frac{y+1}{y+2}$
12. $y' = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} y} \cdot (\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} y)}{\operatorname{arctg}(y+1)}$



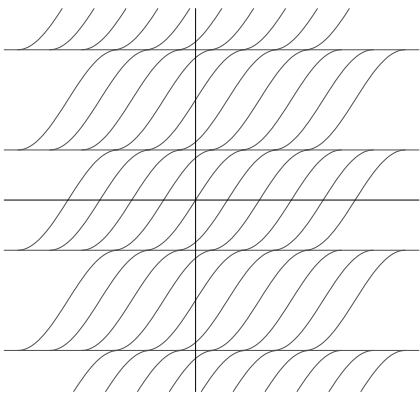
5.



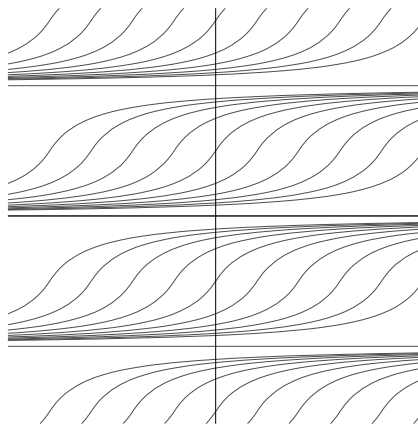
6.



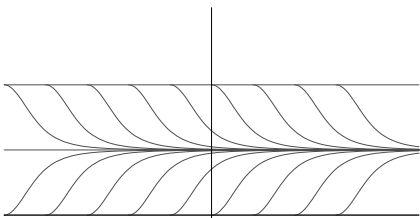
7.



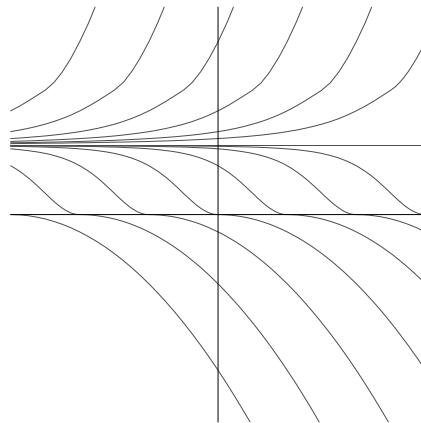
8.



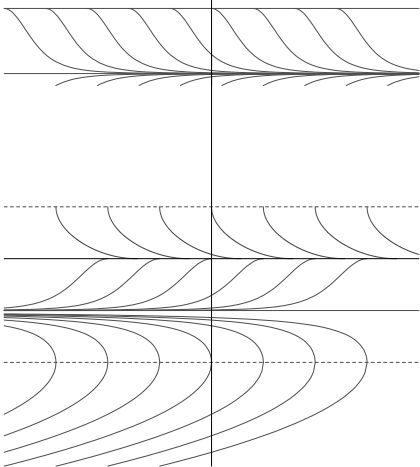
9.



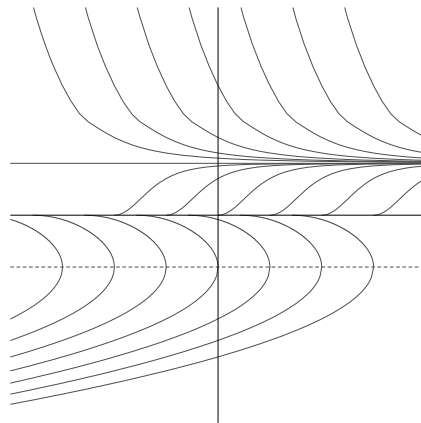
10.



11.



12.



Na obrázcích jsou naznačeny definiční obory a monotonie řešení. Výsledky analýzy jsou zde:

1. Řešení s hodnotami v $(-\infty, 1)$ jsou klesající a definovaná na intervalech typu $(T, +\infty)$, před dosažením hodnoty $1 - \sqrt{2}$ jsou ryze konvexní, po jejím dosažení ryze konkávní. Řešení s hodnotami v $(1, +\infty)$ jsou rostoucí a definovaná na intervalech typu $(T, +\infty)$, před dosažením hodnoty $1 + \sqrt{2}$ jsou ryze konkávní, po jejím dosažení ryze konvexní. [Další výsledky uvádíme stručněji.]

2. Stacionární řešení -1 . $(-\infty, -1)$: rostoucí, ryze konkávní, $(T, +\infty)$; $(-1, 1)$: klesající, ryze konvexní, $(T, +\infty)$; $(1, +\infty)$: rostoucí, ryze konkávní do dosažení y_0 , pak ryze konvexní, kde y_0 je jediný reálný kořen polynomu $2t^3 - 3t^2 - 1$, (T_1, T_2) .

3. Stacionární řešení $-1, 1$. $(-1, 0)$: klesající, ryze konvexní, (T_1, T_2) , lze nalepit s.ř. -1 ; $(0, 1)$: rostoucí, ryze konvexní, (T_1, T_2) , lze nalepit s.ř. 1 .

4. Stacionární řešení $-1, -2, -3$. $(-\infty, -3)$: klesající, ryze konkávní, $(-\infty, T)$; $(-3, -2)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $-2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, pak ryze konkávní, \mathbb{R} ; $(-2, -1)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $-2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, pak ryze konvexní, \mathbb{R} ; $(-1, +\infty)$: rostoucí, ryze konvexní, $(-\infty, T)$.

5. Stacionární řešení $1, 2, 3$. $(-\infty, 1)$: rostoucí, ryze konkávní, $(T, +\infty)$; $(1, 2)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{5}{2}$, pak ryze konkávní, $(-\infty, T)$, lze nalepit s.ř. 2 ; $(2, 3)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $\frac{9}{5}$, pak ryze konvexní, $(-\infty, T)$, lze nalepit s.ř. 2 ; $(3, +\infty)$: rostoucí, ryze konvexní, $(-\infty, T)$.

6. Stacionární řešení $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $(k\pi, (k+1)\pi)$, k sudé: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pak ryze konkávní, (T_1, T_2) , lze nalepit s.ř. $k\pi$ i $(k+1)\pi$; $(k\pi, (k+1)\pi)$, k liché: klesající, ryze konkávní do dosažení $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pak ryze konvexní, (T_1, T_2) , lze nalepit s.ř. $k\pi$ i $(k+1)\pi$.

7. Stacionární řešení $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $k\pi$, pak ryze konkávní, (T_1, T_2) , lze nalepit s.ř. $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ i $\frac{\pi}{2} + k\pi$. (V tomto příkladu je mnoho možností lepení, protože na každé stacionární řešení lze navázat z obou stran.)

8. Stacionární řešení $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $(k\pi, (k+1)\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pak ryze konkávní, \mathbb{R} .

9. Stacionární řešení $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$, pak ryze konkávní, $(T, +\infty)$, lze nalepit s.ř. $2k\pi$; $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $\pi - \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$, pak ryze konvexní, $(T, +\infty)$, lze nalepit s.ř. $(2k+1)\pi$.

10. Stacionární řešení $0, 1$. $(-\infty, 0)$: klesající, ryze konkávní do dosažení y_0 , pak ryze konvexní, $(T, +\infty)$, lze nalepit s.ř. 0 ; $(0, 1)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení y_1 , pak ryze konkávní, $(T, +\infty)$, lze nalepit s.ř. 0 ; $(1, +\infty)$: klesající, ryze konvexní, $(T, +\infty)$. (Hodnoty y_0 a y_1 jsou řešení jistých rovnic, nelze je vyjádřit explicitně, lze však ukázat, že existují a jsou jednoznačně určena.)

11. Stacionární řešení $0, -1$. $(-\infty, -2)$: rostoucí, $(-\infty, T)$; $(-2, -1)$: klesající, $(-\infty, T)$; $(-1, 0)$: rostoucí, $(-\infty, T)$, lze nalepit s.ř. 0 ; $(0, 1)$: klesající, (T_1, T_2) , lze nalepit s.ř. 0 . (Zkoumání konvexity a konkávnosti je těžší.)

12. Stacionární řešení: $0, 1$. $(-\infty, -1)$: rostoucí, $(-\infty, T)$; $(-1, 0)$: klesající, (T_1, T_2) , lze nalepit s.ř. 0 ; $(0, 1)$: rostoucí, $(T, +\infty)$, lze nalepit s.ř. 0 ; $(1, +\infty)$: klesající, \mathbb{R} . (Zkoumání konvexity a konkávnosti je těžší.)

V. LINEÁRNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

- 1.** $y' = \frac{2y}{x}$ **2.** $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ **3.** $y' = \frac{y}{x} - 1$ **4.** $y'x = y + x^2$ **5.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
6. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ **7.** $xy' + y = \log x + 1$ **8.** $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ ($a \in \mathbf{R}$)
9. $(2x+1)y' + y = x$ **10.** $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$ **11.** $y' + y \cos x = \sin 2x$ **12.** $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. 2. $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. 3. $y = -x \log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. 4. $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. 5. $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. 6. $y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = -1/2$ lze lepit, tím dostaneme řešení $y(x) = -\cos x$, $x \in \mathbf{R}$. 7. $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. 8. Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \left(\frac{1}{|a|} \log \frac{1+\sin \arctg \frac{x}{a}}{1-\sin \arctg \frac{x}{a}} + c \right)$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. 9. $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = 0$ lze lepit, dostaneme řešení $y(x) = \frac{1}{3}(x-1)$, $x \in \mathbf{R}$. 10. $y = 1 + \frac{1}{2\cos x} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. 11. $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. 12. $y = x^2 e^{-x} + \frac{c}{x} e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$.

VI. LINEÁRNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ 2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ 3. $y'' - 6y' + 13y = 0$ 4. $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ 6. $y'' - 2y' + 5y = \cos x$ 7. $y'' + y'' = x$ 8. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$
9. $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$ 10. $4y''' + y' = 3e^x + 2 \sin \frac{x}{2}$ 11. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
12. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}$ 13. $y'' + y = \operatorname{tg} x$ 14. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ 15. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. $y = ce^{-2x} + dx e^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. 2. $y = ce^x + de^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. 3. $y = e^{3x}(c \cos 2x + d \sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. 4. $y = a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x + cx \cos \sqrt{3}x + dx \sin \sqrt{3}x$, $x \in \mathbf{R}$. 5. $y = \frac{1}{5}e^{4x} + ce^{-x} + de^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$. 6. $y = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + e^x(c \cos 2x + d \sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. 7. $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + a + bx + ce^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. 8. $y = \frac{1}{6}x e^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. 9. $y = -\frac{1}{20} \sin 2x - \frac{3}{20} \cos 2x - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + ce^{-x} + de^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. 10. $y = \frac{3}{5}e^x - x \sin \frac{x}{2} + a + b \cos \frac{x}{2} + c \sin \frac{x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$. 11. $y = (e^{-x} + e^x) \arctg e^x + ce^x + de^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. 12. $y = e^x \cdot \left(c + dx - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$, $x \in \mathbf{R}$. 13. $y = -\cos x \log \frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c \cos x + d \sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. 14. $y = e^x \cdot \left(c + dx + \sqrt{4-x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right)$, $x \in (-2, 2)$. 15. $y = -e^x \arcsin e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \log \frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{1+\sqrt{1-e^{2x}}} + ce^x + de^{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY – METODY ŘEŠENÍ

Uvažujme soustavu $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$, kde $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitá vektorová funkce a \mathbf{y} je neznámá vektorová funkce.

- (1) Jde o lineární rovnici. Můžeme řešit zvlášť homogenní rovnici (tj. $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y}$) a pak hledat partikulární řešení. Řešení homogenní rovnice jsou definována na \mathbf{R} a tvoří vektorový prostor dimenze n .
- (2) Řešení homogenní rovnice:
 - (i) Napišeme si matici $\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A}$ a tu řádkovými úpravami převedeme na horní trojúhelníkovou matici. Řádkové úpravy jsou:
 - (a) prohození dvou řádků;
 - (b) vynásobení řádku nenulovou konstantou;
 - (c) přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ .

(ii) Vzniklou matici přepíšeme opět na soustavu diferenciálních rovnic následovně: Má-li matice tvar

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

pak nová soustava bude mít tvar

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 &+ P_{12}\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 &+ \dots &+ P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0 \\ &P_{22}\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 &+ \dots &+ P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0 \\ &&&&\vdots \\ &&&&P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \end{aligned}$$

kde symbolem $P\left(\frac{d}{dx}\right)y$ rozumíme funkci $a_k y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, pokud $P(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$.

(iii) Novou soustavu vyřešíme odzadu (tedy od n -té rovnice po první). Přitom používáme metodu řešení lineárních rovnic s konstantními koeficienty – hledání fundamentálního systému a řešení rovnic se speciální pravou stranou.

(3) Pro hledání partikulárního řešení máme následující možnosti:

- Variace konstant: Nechť $\Phi(x)$ je fundamentální matice, tj. její sloupce jsou prvky fundamentálního systému řešení homogenní rovnice. Pak partikulární řešení najdeme ve tvaru $\mathbf{y}_p(x) = \Phi(x)\mathbf{c}(x)$ pro vhodnou vektorovou funkci \mathbf{c} .
- Je-li vektorová funkce \mathbf{b} dostatečně hladká (např. třídy C^∞), lze použít eliminaci pro nehomogenní rovnici: K matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ přidáme ještě sloupec pravých stran a upravujeme takto rozšířenou matici $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} | \mathbf{b}(x))$ typu $n \times (n + 1)$. Řádkovými úpravami dojdeme k matici tvaru

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) & f_1(x, \lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) & f_2(x, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) & f_n(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Tuto matici přepíšeme opět jako soustavu diferenciálních rovnic. Levé strany budou mít stejný tvar jako v případě homogenní soustavy. Funkce $f_j(x, \lambda)$ v posledním sloupci upravené matice mají tvar

$$f_j(x, \lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda^i g_{ji}(x),$$

kde funkce g_{ji} jsou nějaké funkce třídy C^∞ . Nová soustava pak bude mít tvar

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 &+ P_{12}\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 &+ \dots &+ P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= \tilde{f}_1(x) \\ &P_{22}\left(\frac{d}{dx}\right)y_2 &+ \dots &+ P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= \tilde{f}_2(x) \\ &&&&\vdots \\ &&&&P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n &= \tilde{f}_n(x), \end{aligned}$$

kde $\tilde{f}_j(x) = \sum_{i=1}^k g_{ji}^{(i)}(x)$.

VII. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

1. $z' + y = 0, z' - y' = 3z + y$ 2. $z' = -z + y + e^x, y' = z - y + e^x$ 3. $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}, z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ 4. $z' + 3z + y = 0, y' - z + y = 0, y(0) = z(0) = 1$ 5. $z' = y - 7z, y' + 2z + 5y = 0$ 6. $z' = 2y - 5z + e^x, y' = z - 6y + e^{-2x}$ 7. $z'' + y' + z = e^x, z' + y'' = 1$ 8. $u' = w + v - u, v' = w + u - v, w' = u + v + w, (u(0) = 1, v(0) = w(0) = 0)$ 9. $u' = v + w, v' = u + w, w' = u + v, (u(0) = -1, v(0) = 1, w(0) = 0)$

ŘEŠTE SOUSTAVY $y' = Ay + b(x)$, KDE

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$. 11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$. 12. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 17. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ 18. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. $z = ae^x + be^{-3x}, y = -ae^x + 3be^{-3x}$ 2. $z = e^x + de^{-2x} + c, y = e^x - de^{-2x} + c$ 3. $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}, y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ 4. $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}, y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}, y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ 5. $z = (c-d)e^{-6x} \sin x + de^{-6x} \cos x, y = ce^{-6x} \cos x + (c-2d)e^{-6x} \sin x$ 6. $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + 2ae^{-4x} + be^{-7x}, y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + ae^{-4x} - be^{-7x}$ 7. $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx, y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ 8. $u = ae^{-x} + be^{2x} + ce^{-2x}, v = ae^{-x} + be^{2x} - ce^{-2x}, w = -ae^{-x} + 2be^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}, v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}, w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ 9. $u = ae^{2x} + be^{-x}, v = ae^{2x} + ce^{-x}, w = ae^{2x} - (b+c)e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}, v = e^{-x}, w = 0$ 10. $y = (\frac{x-3}{4} + e^{2x}(bx+c), -\frac{3}{4} + e^{2x}(2bx+b+2c), -\frac{2x^2+x+2}{4} + e^{2x}(bx+a+c)), a, b, c \in \mathbb{R}$. 11. $y = (e^{-x}(-1+6c+6bx), e^{-x}(15a+2bx+b+2c), e^{-x}(a+2bx+2c)), a, b, c \in \mathbb{R}$. 12. $y = (6be^{-x} + 6ce^x, 10ae^{-x} + (3a+9c)e^x, 3be^{-x} + (6a+3c)e^x), a, b, c \in \mathbb{R}$. 13. $y = (-\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x - 2a \cdot e^{3x}, \frac{73}{500} \cos x + \frac{89}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (ax^2 + bx + c), -\frac{43}{500} \cos x - \frac{49}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (-ax^2 - (2a+b)x - 4a - b - c), a, b, c \in \mathbb{R}$. 14. $y = ((a+3b)e^x \sin x + (3a-b)e^x \cos x, (2a+b)e^x \sin x + (a-2b)e^x \cos x + ce^{4x}, (2b-a)e^x \sin x + (2a+b)e^x \cos x + ce^{4x}), a, b, c \in \mathbb{R}$. 15. $y = (e^x(bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(4b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d), e^x(a+bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(2b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d), a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 16. $y = (e^{2x}(cx+d), e^{2x}(cx-c+d), e^{2x}(ax+b), e^{2x}((a+c)x - \frac{1}{3}a + b + d)), a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 17. $y = (cx+d, (3c-\frac{5}{2}a)x + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, ax+b, \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b), a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 18. $y = (e^x(a \cos x + b \sin x) + c \cos x + d \sin x, \frac{1}{2}e^x((a+b) \cos x + (b-a) \sin x) + c \cos x + d \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x) + (c-d) \cos x + (c+d) \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x)), a, b, c, d \in \mathbb{R}$.