I. Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+2)+4y(n+1)+4y(n)=0$ **2.** $y(n+2)-3y(n+1)+2y(n)=0$
3. $y(n+2)-6y(n+1)+13y(n)=0$, $y(1)=0$
4. $y(n+2)-2y(n+1)-3y(n)=0$, $y(1)=2$, $y(2)=1$
5. $y(n+2)-y(n+1)-y(n)=0$, $y(1)=y(2)=1$ **6.** $y(n+4)+6y(n+2)+9y(n)=0$
7. $y(n+2)-2y(n+1)+2y(n)=\cos n$ **8.** $y(n+3)-y(n+2)-2y(n+1)+2y(n)=n+2^n$
9. $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=\sin n+\sin 2n$ **10.** $8y(n+3)+y(n)=3n+1/2^n$
11. $y(n+2)-3y(n+1)+2y(n)=n^2$, $y(1)=3$, $y(2)=2$.
12. $y(n+2)-y(n)=17$, $y(1)=y(2)=0$.

Výsledky a návody. **1.** $y(n)=(a+bn)\cdot(-2)^n$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **2.** $y(n)=a+b\cdot 2^n$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **3.** $y(n)=\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{13})^n\cdot(2\cos(n\arccos\frac{3}{\sqrt{13}})-3\sin(n\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}))$ $(a\in\mathbf{R})$ **4.** $y(n)=\frac{1}{4}(3^n-5\cdot(-1)^n)$ **5.** $y(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ **6.** $(\sqrt{3})^n((a+bn)\cos\frac{n\pi}{2}+(c+dn)\sin\frac{n\pi}{2})$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ **7.** $y(n)=\frac{2\sin^2 1\cos 1-1-\cos 1}{8\sin^2 1\cos 1-1-4\sin^2 1-\cos 1}\cos n+\frac{sin^3 1}{8\sin^2 1\cos 1-1-4\sin^2 1-\cos 1}\sin n+(\sqrt{2})^n(a\cos\frac{n\pi}{4}+b\sin\frac{n\pi}{4})$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **8.** $y(n)=2^{n-1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+a+b(\sqrt{2})^n+c(-\sqrt{2})^n$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$
9. $y(n)=\frac{1}{2}(\frac{3\cos 1+3+4\sin^2 1\cos 1}{9+6\sin^2 1+9\cos 1+8\sin^2 1\cos 1}\sin n-\frac{sin 1(4\sin^2 1+5)}{9+6\sin^2 1+9\cos 1+8\sin^2 1\cos 1}\cos n)+$
$+\frac{1}{2}(\frac{3\cos 2+3+4\sin^2 2\cos 2}{9+6\sin^2 2+9\cos 2+8\sin^2 2\cos 2}\sin 2n-\frac{\sin 2(4\sin^2 2+5)}{9+6\sin^2 2+9\cos 2+8\sin^2 2\cos 2}\cos 2n)+a\cdot(-1)^n+b\cdot(-2)^n$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **10.** $y(n)=\frac{1}{3}n-\frac{8}{9}+\frac{1}{2^{n+1}}+a\cdot(-\frac{1}{2})^n+\frac{1}{2^n}(b\cos\frac{n\pi}{3}+c\sin\frac{n\pi}{3})$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$ **11.** $y(n)=5\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{13}{6}n+1$ **12.** $y(n)=\frac{17}{2}n-\frac{17}{4}\cdot(-1)^n-\frac{51}{4}$

II. Rovnice se separovanými proměnnými

1. Nalezněte maximální řešení rovnice $y'=y$ procházející bodem $[0,1]$.
2. Pro diferenciální rovnici $yy'+xy^2=x$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[1,0]$.
3. Pro diferenciální rovnici $y'=\frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[1,\frac{1}{2}]$,
(c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.
4. Pro diferenciální rovnici $y'=-\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[0,1]$.
5. Nalezněte řešení rovnice $y'=\sqrt[5]{y^2}$, které splňuje $y(-2)=-\frac{3}{5}$ a $y(0)=1$.
6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y'=\frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v $\mathbb{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbb{R}$.
7. Řešte rovnici $y'(2-e^x)=-3e^x\tan y\cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)-\lim_{x\to-\infty}y(x)=A?$$

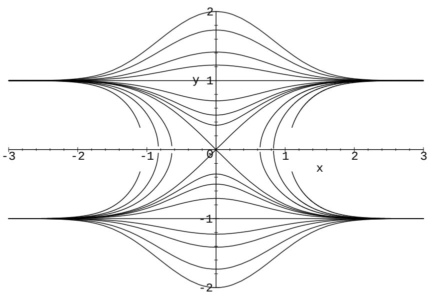
Najděte všechna maximální řešení následujících rovnic

8. $yy'=\frac{1-2x}{y}$ **9.** $xy'+y=y^2$ **10.** $y'=10^{x+y}$ **11.** $e^{-y}(1+y')=1$
12. $y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$, $x\in(-1,1)$ (*na zbylých intervalech) **13.** $y'\sin x=y\ln y$, $y(\frac{\pi}{2})=1$
14. $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0)=1$ **15.** $y-xy'=b(1+x^2y')$, $y(1)=1$ $(b\in\mathbb{R})$

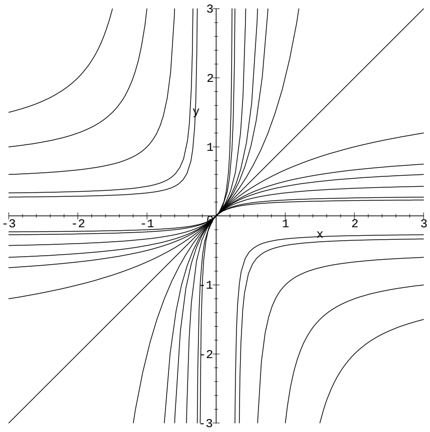
Výsledky a návody. **1.** $y(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. **2.** (a) singulární řešení $y_0^1=1$ na $\mathbb{R}$, $y_0^2=-1$ na $\mathbb{R}$; $y_1^1(x)=\operatorname{sgn} x\cdot\sqrt{1-e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$, $y_1^2(x)=-\operatorname{sgn} x\cdot\sqrt{1-e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$; $y_c^1(x)=\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x\in(\sqrt{\log c},+\infty)$, $y_c^2(x)=-\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x\in(\sqrt{\log c},+\infty)$, $y_c^3(x)=\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x\in(-\infty,-\sqrt{\log c})$, $y_c^4(x)=-\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x\in(-\infty,-\sqrt{\log c})$ pro $c>1$; $y_c^1(x)=\sqrt{1-ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ a $y_c^2(x)=-\sqrt{1-ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ pro $c<0$ a $c\in(0,1)$. (b) Takové řešení neexistuje. **3.** (a) $y_0^1=0$ na $(0,+\infty)$, $y_0^1=0$ na $(-\infty,0)$; další řešení dána vzorečkem $y_c^j(x)=\frac{x}{1-cx}$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j=1,2,3$ definována na intervalech: pro $c>0$ y_c^1 na $(-\infty,0)$, y_c^2 na $(0,\frac{1}{c})$, y_c^3 na $(\frac{1}{c},+\infty)$; pro $c<0$ y_c^1 na $(-\infty,\frac{1}{c})$, y_c^2 na $(\frac{1}{c},0)$, y_c^3 na $(0,+\infty)$. (b) $y_{-1}^3(x)=\frac{x}{1+x}$, $x\in(0,\infty)$. (c) Omezená jsou y_0^1, y_0^2, y_c^1 pro $c>0$, y_c^3 pro $c<0$. **4.** (a) $y_c^1(x)=\operatorname{tg}(c-\frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x\in(\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1},\sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$, $y_c^2(x)=\operatorname{tg}(c-\frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x\in(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1},-\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1})$ pro $c\geq\frac{\pi}{2}$; $y_c(x)=\operatorname{tg}(c-\frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x\in(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1},\sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$ pro $c\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x)=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x\in(-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1},\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1})$. **5.** Takové řešení neexistuje. Všechna maximální řešení jsou: $y_s=0$ na $\mathbb{R}$; $y_{s,c}=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,c]\\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x\in(c,+\infty)\end{cases}$ pro $c\in\mathbb{R}$; $y_{c,s}=\begin{cases}0 & x\in(c,+\infty]\\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x\in(-\infty,c)\end{cases}$ pro $c\in\mathbb{R}$;

$y_{c,d}=\begin{cases}(\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x\in(-\infty,c)\\ 0 & x\in[c,d]\\ (\frac{3}{5}(x-d))^{\frac{5}{3}} & x\in(d,+\infty)\end{cases}$ pro $c,d\in\mathbb{R}$, $c\leq d$. **6.** $y_c=\log(\sin x+c)$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c>1$; $y_c^k=\log(\sin x+c)$, $x\in(2k\pi-\arcsin c,(2k+1)\pi+\arcsin c)$, $k\in\mathbb{Z}$, pro $c\in(-1,1]$; $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\mid y>\log(\sin x+1)\text{ nebo }\sin x=-1\}$. **7.** $y_{a,b,k}(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(a(e^x-2)^3)+k\pi & x\in[\log 2,+\infty)\\ \operatorname{arctg}(b(e^x-2)^3)+k\pi & x\in(-\infty,\log 2)\end{cases}$ pro $a,b\in\mathbb{R}$ a $k\in\mathbb{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi,\pi)$. **8.** $y_c=\sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c<-\frac{1}{4}$; $y_{-1/4}^{1,2}=-\sqrt[3]{3}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $x\in(-\infty,\frac{1}{2})$; nebo $x\in(\frac{1}{2},\infty)$; $y_c^{1,2,3}=\sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x\in(-\infty,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x\in(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4c},\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x\in(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4c},\infty)$, pro $c>-\frac{1}{4}$. **9.** $y_0=1$, $x\in\mathbb{R}$; $y_\infty=0$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^{1,2}=\frac{1}{1-cx}$, $x\in(-\infty,\frac{1}{c})$ nebo $x\in(\frac{1}{c},\infty)$, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **10.** $y_c=-\log_{10}(c-10^x)$, $x\in(-\infty,\log_{10}c)$, pro $c>0$. **11.** $y_\infty=0$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^1=-\log(1+e^{x-c})$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c\in\mathbb{R}$; $y_c^2=-\log(1-e^{x-c})$, $x\in(-\infty,-c)$, pro $c\in\mathbb{R}$. **12.** $y_{-\frac{3}{2}\pi}=-1$, $x\in(-1,1)$; $y_{\frac{\pi}{2}}=1$, $x\in(-1,1)$; $y_c=\begin{cases}x\cdot\sin c+\sqrt{1-x^2}\cdot\cos c & x\in(-1,-\sin c)\\ -1 & x\in[-\sin c,1)\end{cases}$ pro $c\in(-\frac{3}{2}\pi,-\frac{\pi}{2})$; $y_c=\begin{cases}x\cdot\sin c+\sqrt{1-x^2}\cdot\cos c & x\in(\sin c,1)\\ 1 & x\in[-1,\sin c)\end{cases}$, pro $c\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}}=-x$, $x\in(-1,1)$. **13.** $y_0=1$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^k=e^{c\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, pro $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0. **14.** $y_0=x$, $x\in\mathbb{R}$; $y_\infty^{1,2}=-\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$; $y_c^{1,2}=\frac{x+c}{1-cx}$, $x\in(-\infty,\frac{1}{c})$ nebo $x\in(\frac{1}{c},\infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1. **15.** Pro $b=0$: $y_c=cx$, $x\in\mathbb{R}$, pro $c\in\mathbb{R}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1. Pro $b\neq 0$: $y_0=b$, $x\in\mathbb{R}$; $y_c^{1,2}=b+\frac{cx}{1+bx}$, $x\in(-\infty,-\frac{1}{b})$ nebo $x\in(-\frac{1}{b},\infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0, pokud $b=1$; neexistuje, pokud $b=-1$; $y^1_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b<-1$; $y^2_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b\in(-1,1)\cup(1,\infty)$.

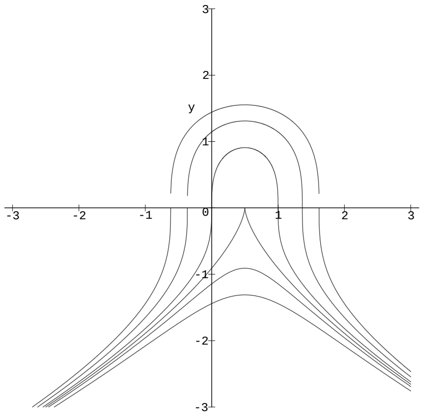
2.



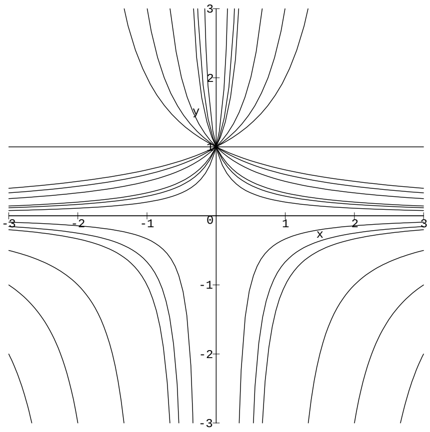
3.



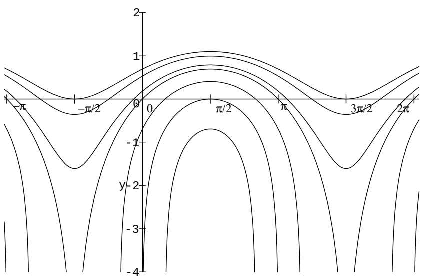
8.



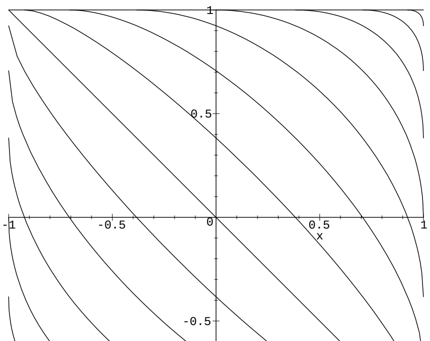
9.



6.



12.



III. Některé typy diferenciálních rovnic, které lze převést na rovnice se separovanými proměnnými

1. $y' = \cos(x-y)$ **2.** $y' = \sin(x+y)$ **3.** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ **4.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ **5.** $xy' = y \log \frac{y}{x}$
6. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ **7.** $y^2 + x^2 y' = xyy'$ **8.** $xy' - y = \sqrt{y^2 + x^2}$ **9.** $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$ **10.** $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$
11. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ **12.** $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$

Výsledky a návody. **1.** Substituce $y = x - z$; řešení $y(x) = x - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$); $y(x) = x - 2\operatorname{arccotg}(-x - c) - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$). **2.** Substituce $y = z - x$; řešení $y(x) = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$), $y(x) = \begin{cases} -x - 2\operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) + 2k\pi & x \in (-\infty, c) \\ -x - \pi + 2k\pi & x = -c \\ -x - 2\operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) - \pi + 2k\pi & x \in (-c, \infty) \end{cases}$ ($c \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$). V příkladech **3.-8.** použijte substituci $y = xz$. **3.** $y(x) = -x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = 2x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = x\frac{2+kx^3}{1-kx^3}$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \infty)$ pro $k > 0$ a na intervalech $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, 0)$ nebo $(0, \infty)$ pro $k < 0$. **4.** $y(x) = 2x\sqrt{\log|x| + c}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞); $y(x) = -2x\sqrt{\log|x| + c}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞). **5.** $y(x) = ex$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = xe^{1+kx}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **6.** $y(x) = -x\log(-\log|x| - c)$, $x \in (-e^{-c}, 0)$ nebo $x \in (0, e^{-c})$ ($c \in \mathbf{R}$). **7.** $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = kx^2$, $x \in (-\infty, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **8.** $y(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2k}$, $x \in (0, \infty)$ ($k > 0$); $y(x) = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k}x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ ($k > 0$). **9.-11.** substitucí $x = t + a$, $y = z + b$ pro vhodná a, b převést na předchozí typ. **12.** substitucí $y^2 = z$ převést na předchozí typ.

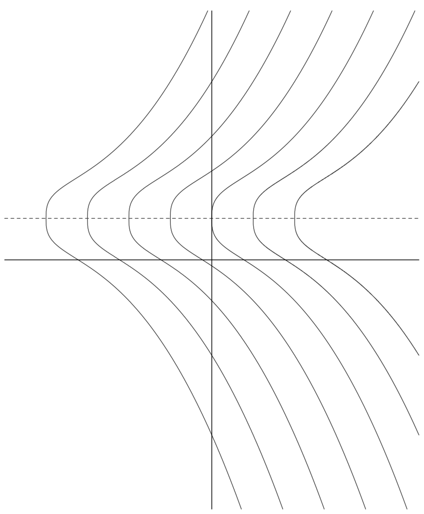
==

IV. Načrtněte graf řešení, aniž explicitně vyřešíte rovnici

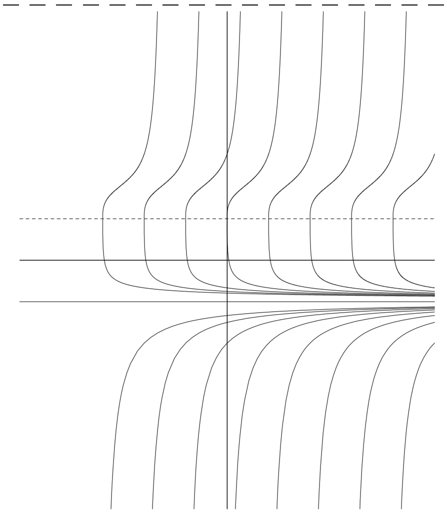
1. $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$ **2.** $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$ **3.** $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1 - y^2}$ **4.** $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$
5. $y' = (y-1)^2\sqrt[3]{y-2}(y-3)$ **6.** $y' = \sqrt[3]{\sin y}$ **7.** $y' = \sqrt{|\cos y|}$ **8.** $y' = \sin^2 y$
9. $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$

- -

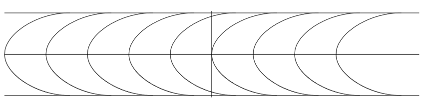
1.



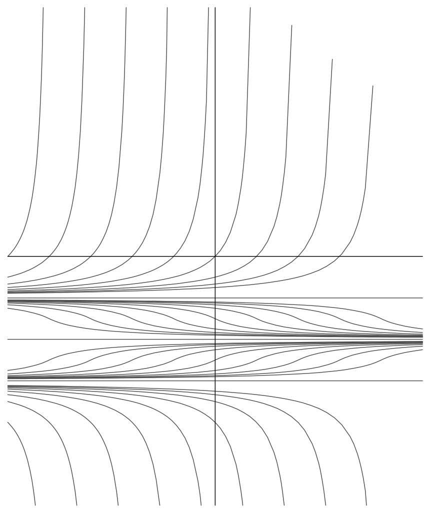
2.



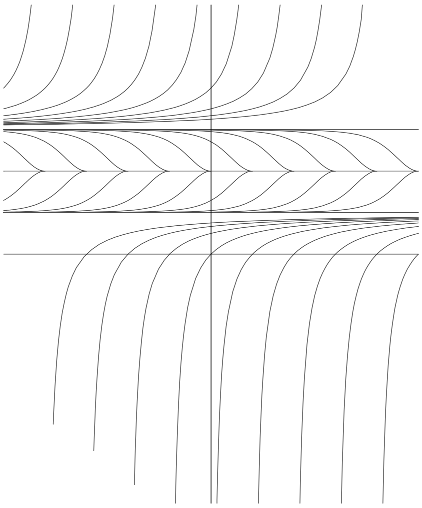
3.



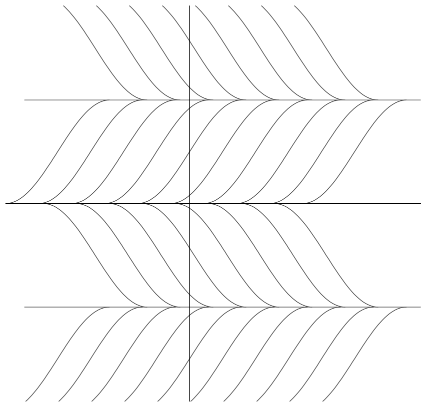
4.



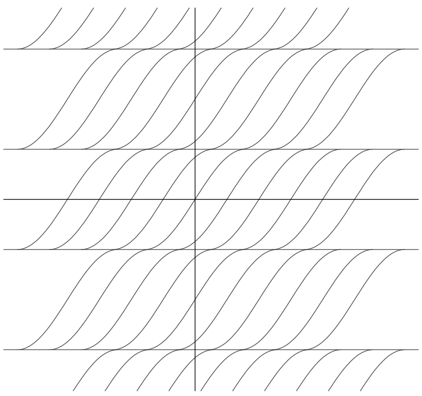
5.



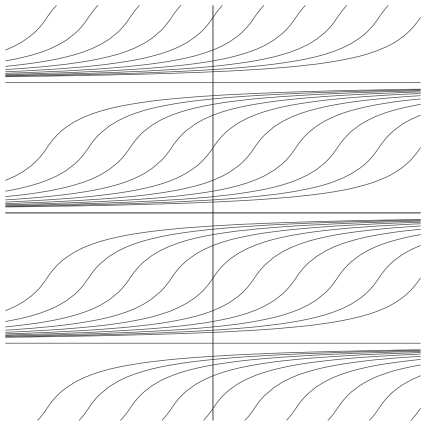
6.



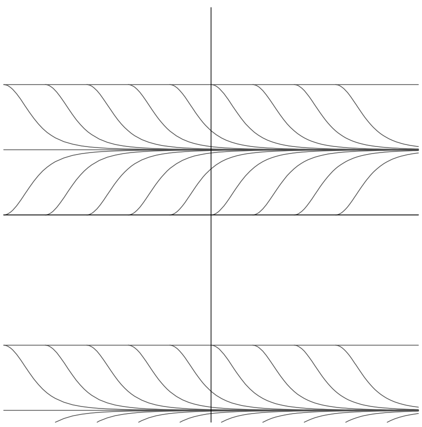
7.



8.



9.



V. Lineární rovnice prvního řádu

1. $y' = \frac{2y}{x}$ **2.** $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ **3.** $y' = \frac{y}{x} - 1$ **4.** $y'x = y + x^2$ **5.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
6. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ **7.** $xy' + y = \log x + 1$ **8.** $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ $(a \in \mathbf{R})$
9. $(2x+1)y' + y = x$ **10.** $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$ **11.** $y' + y \cos x = \sin 2x$ **12.** $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

Výsledky a návody. **1.** $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **2.** $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **3.** $y = -x \log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **4.** $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. **5.** $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **6.** $y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = -1/2$ lze lepit, tím dostaneme řešení $y(x) = -\cos x$, $x \in \mathbf{R}$. **7.** $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **8.** Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{1}{|a|}\log\frac{1+\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{1-\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}} + c\right)$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. **9.** $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = 0$ lze lepit, dostaneme řešení $y(x) = \frac{1}{3}(x-1)$, $x \in \mathbf{R}$. **10.** $y = 1 + \frac{1}{2\cos x}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. **11.** $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. **12.** $y = x^2e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$.

==

Exaktní rovnice a Bernoulliovy rovnice – metody řešení

Uvažujme rovnici tvaru

$$(*) \qquad y'f(x,y) + g(x,y) = 0.$$

Jestliže existuje funkce F třídy C^1 taková, že $\frac{\partial F}{\partial y} = f$ a $\frac{\partial F}{\partial x} = g$, pak řešení rovnice (*) splňují $F(x, y(x)) = c$ pro nějakou konstantu $c \in \mathbf{R}$. (Takovým rovnicím říkáme **exaktní**.)

Větička. Nechť f a g jsou dvě funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřeném obdélníku $(a,b) \times (c,d)$. Pak existuje funkce F na $(a,b) \times (c,d)$, pro kterou $f = \frac{\partial F}{\partial y}$ a $g = \frac{\partial F}{\partial x}$, právě když $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ na $(a,b) \times (c,d)$.

Není-li rovnice (*) exaktní, lze ji převést na exaktní vynásobením jistou funkcí (tzv. **integračním faktorem**). V některých speciálních případech můžeme tento integrační faktor jednoduše nalézt:

- Pokud $\dfrac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)}$ nezávisí na y, pak pro rovnici (*) existuje integrační faktor, který je funkcí x.
- Pokud $\dfrac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{g(x,y)}$ nezávisí na x, pak existuje integrační faktor, který je funkcí y.

Bernoulliovy rovnice jsou rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

kde p, q jsou funkce spojité na zadaném intervalu a $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

Metody řešení:

(1) Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = z(x)^{1/(1-\alpha)}$, kde $z(x)$ je nová neznámá funkce. Tím dostaneme lineární rovnici prvního řádu.

(2) Rovnici vydělíme y^α a pak vynásobíme integračním faktorem $e^{(1-\alpha)P(x)}$, kde P je primitivní funkce k p.

==

VI. Exaktní rovnice, Bernoulliho rovnice

1. $2xyy' + y^2 = 0$ **2.** $(x + 2y)y' + y + 3x^2 = 0$ **3.** $3xy^2y' + 2x + y^3 = 0$

4. $4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x + (x^4e^{x+y} + 2y)y' = 0$, $y(0) = 1$.

5. $2x\sin y + y^3e^x + (x^2\cos y + 3y^2e^x)y' = 0$ **6.** $\frac{1}{2}y^2 + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$

7. $1 + (1 + xy)e^{xy} + (1 + x^2e^{xy})y' = 0$ **8.** $2x\cos y + 3x^2y + (x^3 - x^2\sin y - y)y' = 0$, $y(0) = 2$

9. $3x^2 + 4xy + (2y + 2x^2)y' = 0$, $y(0) = 1$ **10.** $3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$, $y(2) = 1$

11. $ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x + (xe^{xy}\cos 2x - 3)y' = 0$, $y(0) = 0$

12. $xy' + y = y^2\log x$ **13.** $y' + 2xy = 2x^3y^3$ **14.** $y' + \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$. **15.** $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

16. $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ **17.** $x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2)$

Výsledky a návody. (Výsledky jsou uvedeny v implicitním tvaru a bez definičních oborů – v některých případech je explicitní tvar řešení i tvar definičního oboru zřejmý, jindy nelze jednoduše explicitně vyjádřit.) **1.** $xy^2 = c$ **2.** $xy + y^2 + x^3 = c$ **3.** $xy^3 + x^2 = c$ **4.** $x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2 = 1$ **5.** $x^2 \sin y + y^3 e^x = c$ **6.** $\frac{1}{2} y^2 e^x + y e^{2x} = c$ (integrační faktor e^x) **7.** $x + y + e^{xy} = c$ **8.** $x^3 y + x^2 \cos y - \frac{1}{2} y^2 = 2$ **9.** $x^3 + y^2 + 2x^2 y^2 = 1$ **10.** $x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 = 10$ (integrační faktor x) **11.** $e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 = 1$ **12.** $y(x) = \frac{1}{1 + \log x + cx}$ **13.** $y^2 = -\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2} + 2ce^{-x^2}}$ **14.** $y(x) = \frac{1}{-1 + 3e^{1 - \frac{1}{x}}}$, $x \in (\frac{1}{1 + \log 3}, +\infty)$ **15.** $y^3 = x^3 + cx^2$ **16.** $y^4 = \sqrt{x+1} + c\sqrt{|x|}$ **17.** $\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x} + 2e^{2x} \int \frac{e^{-2x}}{x} \, dx$

==

VII. Lineární rovnice s konstantními koeficienty

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ **2.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ **3.** $y'' - 6y' + 13y = 0$ **4.** $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ **6.** $y'' - 2y' + 5y = \cos x$ **7.** $y''' + y'' = x$ **8.** $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$
9. $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$ **10.** $4y''' + y' = 3e^x + 2 \sin \frac{x}{2}$ **11.** $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
12. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}$ **13.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$ **14.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$ **15.** $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

- -

Výsledky a návody. **1.** $y = ce^{-2x} + dxe^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **2.** $y = ce^x + de^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **3.** $y = e^{3x}(c \cos 2x + d \sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. **4.** $y = a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x + cx \cos \sqrt{3}x + dx \sin \sqrt{3}x$, $x \in \mathbf{R}$. **5.** $y = \frac{1}{5} e^{4x} + ce^{-x} + de^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$. **6.** $y = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + e^x(c \cos 2x + d \sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. **7.** $y = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + a + bx + ce^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. **8.** $y = \frac{1}{6} xe^{2x} - \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{8} x^2 - \frac{7}{8} x + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **9.** $y = -\frac{1}{20} \sin 2x - \frac{3}{20} \cos 2x - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + ce^{-x} + de^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **10.** $y = \frac{3}{5} e^x - x \sin \frac{x}{2} + a + b \cos \frac{x}{2} + c \sin \frac{x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$. **11.** $y = e^x(1 + e^{2x}) \operatorname{arctg} e^x + ce^x + de^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. **12.** $y = e^x \cdot \left(c + dx - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x \in \mathbf{R}$. **13.** $y = -\cos x \log \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} + c \cos x + d \sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. **14.** $y = e^x \cdot \left(c + dx + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2}\right)$, $x \in (-2, 2)$. **15.** $y = -e^x \arcsin e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \log \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2x}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2x}}} + ce^x + de^{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

==

Eulerovy rovnice – metody řešení

Eulerovy rovnice jsou rovnice tvaru $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ jsou konstanty a f je funkce spojitá na zadaném intervalu (α, β). Je-li funkce f nulová, mluvíme o homogenní rovnici.

Postup řešení:

(1) Řešíme zvlášť na intervalu $(\alpha, \beta) \cap (0, +\infty)$ a na $(\alpha, \beta) \cap (-\infty, 0)$. Nakonec si rozmyslíme, kdy lze řešení nalepit v 0.

(2) Jde o lineární rovnici. Je tedy možné řešit nejprve homogenní rovnici a pak hledat partikulární řešení. Množina řešení homogenní rovnice (na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$) je vektorový prostor dimenze n.

(3) Pro řešení homogenní rovnice (tj. pro hledání fundamentálního systému) na intervalu $(0, +\infty)$ jsou dva možné postupy:

   (a) Provedeme substituci „$x = e^t$“, tj. zavedeme novou neznámou funkci $z(t) = y(e^t)$ (hledáme řešení ve tvaru $y(x) = z(\log x)$). Tím dostaneme lineární rovnici s konstantními koeficienty pro neznámou funkci z, kterou umíme řešit.

   (b) Hledáme řešení tvaru $y(x) = x^\alpha$. Dosadíme-li toto do rovnice, dostaneme rovnici $P(\alpha) = 0$, kde P je polynom stupně n. Najdeme kořeny. Fundamentální systém bude tvořen funkcemi $h_i(\log x)$, kde h_i jsou prvky fundamentálního systému lineární rovnice s konstantními koeficienty s charakteristickým polynomem P.

(4) Pro řešení homogenní rovnice na $(-\infty, 0)$ využijeme toho, že funkce y je řešením homogenní rovnice na $(0, +\infty)$, právě když funkce $\tilde{y}(x) = y(-x)$ je řešením homogenní rovnice na $(-\infty, 0)$.

(5) Pro hledání partikulárního řešení lze použít:

   (a) Metodu variace konstant – stejně jako u lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

   (b) Analogii metody speciální pravé strany – analogii Věty XVI.5.

   (c) Používáme-li výše substituci $x = e^t$, lze ji použít na celou, tedy nehomogenní rovnici, a pak hledáme partikulární řešení pro příslušnou lineární rovnici s konstantními koeficienty.

VIII. Eulerovy rovnice

1. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$ **2.** $x^2y'' + xy' + y = x$ **3.** $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$ **5.** $x^3y''' + xy' - y = 0$ **6.** $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' - 6xy' + 12y = x^2$

- -

Výsledky a návody. **1.** $y(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^7, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ a_2x^3 + b_2x^7, & x > 0, \end{cases}$ $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$. **2.** $y(x) = \frac{1}{2}x + a\cos\log|x| + b\sin\log|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $[a, b] \in \mathbf{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$; $y(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in \mathbf{R}$. **3.** $y(x) = x\log^2|x| + ax + bx\log|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a, b \in \mathbf{R}$. **4.** $y(x) = x^3 + x + x\log|x| + ax + bx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a, b \in \mathbf{R}$. **5.** $y(x) = ax + bx\log|x| + cx\log^2|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbf{R}$; $y(x) = ax$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$. **6.** $y(x) = \frac{1}{4}x^2\log|x| + ax^2 + \frac{b}{x^2} + c|x|^{\sqrt{3}} + \frac{d}{|x|^{\sqrt{3}}}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

==

IX. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

1. $z' + y = 0$, $z' - y' = 3z + y$ **2.** $z' = -z + y + e^x$, $y' = z - y + e^x$ **3.** $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}$, $z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ **4.** $z' + 3z + y = 0$, $y' - z + y = 0$, $y(0) = z(0) = 1$ **5.** $z' = y - 7z$, $y' + 2z + 5y = 0$ **6.** $z' = 2y - 5z + e^x$, $y' = z - 6y + e^{-2x}$ **7.** $z'' + y' + z = e^x$, $z' + y'' = 1$ **8.** $u' = w + v - u$, $v' = w + u - v$, $w' = u + v + w$, $(u(0) = 1,\ v(0) = w(0) = 0)$ **9.** $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$, $(u(0) = -1,\ v(0) = 1,\ w(0) = 0)$

řešte soustavy $y' = Ay + b(x)$, kde

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$. **11.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$. **12.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **14.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **15.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **17.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **18.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. **1.** $z = ae^x + be^{-3x}$, $y = -ae^x + 3be^{-3x}$ **2.** $z = e^x + de^{-2x} + c$, $y = e^x - de^{-2x} + c$ **3.** $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ **4.** $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}$, $y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$, $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ **5.** $z = (c-d)e^{-6x}\sin x + de^{-6x}\cos x$, $y = ce^{-6x}\cos x + (c-2d)e^{-6x}\sin x$ **6.** $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + 2ae^{-4x} + be^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + ae^{-4x} - be^{-7x}$ **7.** $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ **8.** $u = ae^{-x} + be^{2x} + ce^{-2x}$, $v = ae^{-x} + be^{2x} - ce^{-2x}$, $w = -ae^{-x} + 2be^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ **9.** $u = ae^{2x} + be^{-x}$, $v = ae^{2x} + ce^{-x}$, $w = ae^{2x} - (b+c)e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$ **10.** $y = (\frac{x-3}{4} + e^{2x}(bx+c), -\frac{3}{4} + e^{2x}(2bx+b+2c), -\frac{2x^2+x+2}{4} + e^{2x}(bx+a+c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = (e^{-x}(-1+6c+6bx), e^{-x}(15a+2bx+b+2c), e^{-x}(a+2bx+2c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = (6be^{-x} + 6ce^x, 10ae^{-x} + (3a+9c)e^x, 3be^{-x} + (6a+3c)e^x)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **13.** $y = (-\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x - 2a \cdot e^{3x}, \frac{73}{500}\cos x + \frac{89}{500}\sin x + e^{3x} \cdot (ax^2 + bx + c), -\frac{43}{500}\cos x - \frac{49}{500}\sin x + e^{3x} \cdot (-ax^2 - (2a+b)x - 4a - b - c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **14.** $y = ((a+3b)e^x\sin x + (3a-b)e^x\cos x, (2a+b)e^x\sin x + (a-2b)e^x\cos x + ce^{4x}, (2b-a)e^x\sin x + (2a+b)e^x\cos x + ce^{4x})$,$a, b, c \in \mathbb{R}$. **15.** $y = (e^x(bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(4b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d, e^x(a+bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(2b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **16.** $y = (e^{2x}(cx+d), e^{2x}(cx-c+d), e^{2x}(ax+b), e^{2x}((a+c)x - \frac{1}{3}a + b + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **17.** $y = (cx+d, (3c-\frac{5}{2}a)x + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, ax+b, \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **18.** $y = (e^x(a\cos x + b\sin x) + c\cos x + d\sin x, \frac{1}{2}e^x((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + c\cos x + d\sin x, e^x(a\cos x + b\sin x) + (c-d)\cos x + (c+d)\sin x, e^x(a\cos x + b\sin x))$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

==

X. Lineární rovnice - snižování řádu, variace konstant

1. $y'' - \frac{xy'}{x^2+1} + \frac{y}{x^2+1} = 0$ **2.** $y'' - x^2y' + (x^2-1)y = 0$ **3.** $y'' - \frac{2y}{x^2} = 5$ **4.** $y'' - \frac{1+x^2}{x}y' + 2y = 0$ **5.** $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = x^3$ **6.** $y'' + \frac{1-x^2}{x}y' + \frac{y}{\log x} = 0$ **7.** $y'' + \frac{y}{x^2\log x} = 0$

- -

Výsledky a návody. **1.** FS tvoří $y_1 = x$ (lze uhodnout) a $y_2 = x\log(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$ (na $\mathbb{R}$). **2.** FS tvoří $y_1 = e^x$ (lze uhodnout) a $y_2 = e^x \int_0^x e^{\frac{1}{3}t(t^2-6)}\,\mathrm{d}t$ (na $\mathbb{R}$). **3.** FS tvoří $y_1 = x^2$ a $y_2 = \frac{1}{x}$ (uhodnout lze kterékoliv z těchto dvou řešení), partikulární řešení je např. $y_0 = \frac{5}{3}x^2\log|x|$ (z variace konstant vyjde $\frac{5}{3}x^2\log|x| - \frac{5}{9}x^2$, přitom $-\frac{5}{9}x^2$ je řešením homogenní rovnice). Vše na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$. **4.** FS tvoří $y_1 = x^2$ (lze uhodnout) a $y_2 = x^2\int_1^x \frac{1}{t^3}e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$ (na $(0, +\infty)$; na $(-\infty, 0)$ ve vzorci pro y_2 bude $\int_{-1}^x$). **5.** FS tvoří $y_1 = x$ a $y_2 = x^5$, partikulární řešení je např. $y_0 = \frac{1}{4}x^5\log|x|$. Vše na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$. **6.** FS tvoří $y_1 = \log x$ (lze uhodnout) a $y_2 = \log x \int_2^x \frac{e^{t^2/2}}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ (na $(1, +\infty)$; na $(0, 1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$). **7.** FS tvoří $y_1 = \log x$ (lze uhodnout) a $y_2 = \int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ (na $(1, +\infty)$; na $(0, 1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$).