

I. VYJÁDŘETE PRIMITIVNÍ FUNKCE POMOCÍ ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ  
NA MAXIMÁLNÍCH INTERVALECH EXISTENCE

1.  $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x} dx$     2.  $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx$     3.  $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$     4.  $\int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx$   
 5.  $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$     6.  $\int \sin^7 x \cos x dx$     7.  $\int xe^{-x^2} dx$     8.  $\int \operatorname{tg} x dx$     9.  $\int \operatorname{cotg} x dx$   
 10.  $\int \sqrt{x^6} dx$     11.  $\int |\cos x| dx$     12.  $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1} dx$     13.  $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$     14.  $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$   
 15.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$     16.  $\int \operatorname{cotg}^2 x dx$     17.  $\int \frac{dx}{2+3x^2}$     18.  $\int \sin^2 x dx$     19.  $\int \cos^4 x dx$     20.  $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3)}$   
 21.  $\int \frac{x}{1+4x^2} dx$     22.  $\int \frac{x}{1+x^4} dx$     23.  $\int \frac{dx}{x \log x \log \log x}$     24.  $\int xe^x dx$     25.  $\int \log x dx$   
 26.  $\int \operatorname{arctg} x dx$     27.  $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$     28.  $\int e^{ax} \cos bx dx$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$     29.  $\int x^\alpha \log x dx$   
 30.  $\int x^3 \log^2 x dx$     31.  $\int e^{\sqrt{x}} dx$     32.  $\int \log(x + \sqrt{x^2+1}) dx$

VÝSLEDKY A NÁVODY. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. 1.  $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16 \log|x|$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$     2.  $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3 \sin x$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$     3.  $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$ , na  $\mathbb{R}$     4.  $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$     5.  $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$ , na  $(-\infty, 1)$  a na  $(1, \infty)$  (substituce „ $y = 1-x$ “)    6.  $\frac{1}{8} \sin^8 x$  na  $\mathbb{R}$     7.  $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$  na  $\mathbb{R}$     8.  $-\log|\cos x|$  na každém z intervalů  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$     9.  $\log|\sin x|$  na každém z intervalů  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$     10.  $\frac{1}{4}|x| \cdot x^3$ , na  $\mathbb{R}$     11.  $\sin(x - \pi \cdot [\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}]) + 2 \cdot [\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}]$ , na  $\mathbb{R}$     12.

$$F(x) = \begin{cases} 2 \log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4 \log \frac{x_1}{x_2} & x \in [-\infty, -x_2] \\ -\pi(x+x_1) - 2 \log(1+x^2) + 4 \log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [-x_2, -x_1] \\ 2 \log(1+x^2) & x \in [-x_1, x_1] \\ \pi(x-x_1) - 2 \log(1+x^2) + 4 \log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [x_1, x_2] \\ 2 \log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4 \log \frac{x_1}{x_2} & x \in [x_2, \infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 = \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{cases}, \text{ na}$$

- $\mathbb{R}$     13.  $\frac{-10 \cdot 5^{-x} \log 2 + 2^{-x} \log 5}{5 \log 5 \log 2}$ , na  $\mathbb{R}$     14.  $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$ , na  $\mathbb{R}$     15.  $\operatorname{tg} x - x$ , na každém z intervalů  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$     16.  $-\operatorname{cotg} x - x$ , na každém z intervalů  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$     17.  $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{6}}{2}$ , na  $\mathbb{R}$     18.  $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$ , na  $\mathbb{R}$     19.  $\frac{3}{8}x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x$ , na  $\mathbb{R}$     20.  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}(x^3)$ , na každém z intervalů  $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$     21.  $\frac{1}{8} \log(1+4x^2)$ , na  $\mathbb{R}$     22.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2)$ , na  $\mathbb{R}$     23.  $\log|\log \log x|$ , na  $(1, e)$  a na  $(e, \infty)$     24.  $(x-1)e^x$  na  $\mathbb{R}$     25.  $x \log x - x$  na  $(0, \infty)$     26.  $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$  na  $\mathbb{R}$     27.  $-\frac{1}{2}e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)$ , na  $\mathbb{R}$     28.  $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \cdot (a \cos bx + b \sin bx)$  na  $\mathbb{R}$ , pokud  $a^2 + b^2 \neq 0$ ;  $x$  na  $\mathbb{R}$ , pokud  $a = b = 0$     29.  $\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} \cdot (\log x - \frac{1}{1+a})$ , na  $(0, \infty)$  pro  $\alpha \neq -1$ ;  $\frac{1}{2} \ln^2 x$ , na  $(0, \infty)$  pro  $\alpha = -1$     30.  $\frac{1}{4}x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8}x^4 \ln x + \frac{1}{32}x^4$ , na  $(0, \infty)$     31.  $2e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 1)$ , na  $(0, \infty)$  (substituce „ $y = \sqrt{x}$ “)    32.  $x \log(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$ , na  $\mathbb{R}$  (per partes  $1 \cdot \log(x + \sqrt{x^2+1})$ )

II. SPOČTĚTE PRIMITIVNÍ FUNKCE

1.  $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} dx$     2.  $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1} dx$     3.  $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$     4.  $\int \frac{x}{x^3-1} dx$     5.  $\int \frac{dx}{x^4+1}$   
 6.  $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$  pomocí  $x = \operatorname{tg} y$     7.  $\int \frac{x^8+x-1}{x^6+1} dx$     8.  $\int \frac{dx}{(x^2+3x+4)^2}$   
 9. Pro jaký vztah mezi parametry  $a, b, c \in \mathbb{R}$  je primitivní funkce k funkci  $f$  racionální, je-li  $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$ ?    10.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$     11.  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$     12.  $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$     13.  $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$   
 14.  $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} dx$     15.  $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx$     16.  $\int \frac{\exp x}{\exp x+1} dx$     17.  $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$     18.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$   
 19.  $\int \sqrt{x^2-2x-1} dx$     20.  $\int \frac{(2x+3) dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$     21.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$     22.  $\int \sqrt{x^2-1} dx$   
 23.  $\int \sqrt{1-x^2} dx$     24.  $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx$     25.  $\int \frac{1}{\sin x} dx$     26.  $\int \frac{1}{\cos x} dx$     27.  $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2 \cos x}$   
 28.  $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$     29.  $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}$     30.  $\int \frac{dx}{(2+\cos x) \sin x}$     31.  $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$   
 32.  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$     33.  $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$

- VÝSLEDKY A NÁVODY. 1.  $\left(\sum_1^{17} \frac{x^k}{k}\right) - 4 \log|x-1|$ ,  $x \in (-\infty, 1)$  nebo  $x \in (1, +\infty)$  2.  $\left(\sum_1^8 \frac{1}{2^k} x^{2^k}\right) - 2 \log|x-1| + 3 \log|x+1|$ ,  $x \in (-\infty, -1)$  nebo  $x \in (-1, 1)$  nebo  $x \in (1, +\infty)$  3.  $x + \frac{1}{6} \log|x| - \frac{9}{2} \log|x-2| + \frac{28}{3} \log|x-3|$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, 2)$  nebo  $x \in (2, 3)$  nebo  $x \in (3, +\infty)$  4.  $\frac{1}{6} \log \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ ,  $x \in (-\infty, 1)$  nebo  $x \in (1, +\infty)$  5.  $\frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)$  6.  $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$  7.  $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} \log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \log(x^2-x\sqrt{3}+1) - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \log(x^2+x\sqrt{3}+1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$  8.  $\frac{1}{7} \cdot \frac{2x+3}{x^2+3x+4} + \frac{4\sqrt{7}}{49} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}}$  9.  $a + 2b + 3c = 0$  10.  $6\left(\frac{1}{9}u^{(3/2)} - \frac{1}{8}u^{(4/3)} + \frac{1}{7}u^{(7/6)} - \frac{1}{6}u + \frac{1}{5}u^{(5/6)} - \frac{1}{4}u^{(2/3)}\right)$ , kde  $u = x + 1$ ,  $x \in (-1, +\infty)$  11.  $\log \left| \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ,  $x \in (-1, 1)$  12.  $\log \frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u-1}{\sqrt{3}}$ , kde  $u = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ ,  $x \in (-\infty, -1)$  nebo  $x \in (-1, 0)$  nebo  $x \in (1, +\infty)$  13.  $t = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$  14.  $t = \sqrt[6]{x+1}$  15.  $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  16.  $\log(e^x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  17.  $e^x - \log(1 + e^x)$  18.  $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}} - \log(\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  19.  $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \log|x-1 + \sqrt{x^2-2x-1}|$ ,  $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2})$  nebo  $x \in (1 + \sqrt{2}, +\infty)$  20.  $\log \frac{t^2-4t+6}{t^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t-2}{\sqrt{2}}$ , kde  $t = \sqrt{x^2+2x+4} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  21.  $\operatorname{argsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$  na  $\mathbb{R}$  22.  $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \log|x + \sqrt{x^2-1}|$  na  $(-\infty, -1)$  a na  $(1, +\infty)$  23.  $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$  na  $(-1, 1)$  24.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sin^2 x$  na  $\mathbf{R}$  25.  $-\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|$  na každém z intervalů  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  26.  $\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|$  na každém z intervalů  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  27. a 28. substituce  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  29. substituce  $y = \operatorname{tg} x$  30. substituce  $y = \cos x$  31. substituce  $y = \operatorname{tg} x$  32. substituce  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  33. substituce  $y = \operatorname{tg} x$

### III. VYPOČTĚTE NÁSLEDUJÍCÍ INTEGRÁLY

1.  $\int_0^2 |1-x| dx$  2.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x \cos \alpha + 1}$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$  3.  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}$ ,  $\varepsilon \in [0, 1)$  4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ ,  $ab \neq 0$  5.  $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$  6.  $\int_0^{\log 2} x e^{-x} dx$  7.  $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$  8.  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx$  9.  $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$  10.  $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1} dx$  11.  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$  12.  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$  13.  $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1}$  14.  $\int_1^e (x \log x)^2 dx$  15.  $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$  16.  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$  17.  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$  18.  $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$  19.  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ ,  $n \in \mathbf{N}$

- VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. 1 2.  $\frac{\pi}{2 \sin \alpha}$  3.  $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ , substituce  $t = \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$  4.  $\frac{\pi}{2|ab|}$  (např.  $t = \operatorname{tg} x$ ) 5.  $200\sqrt{2}$  6.  $\frac{1-\log 2}{2}$  7.  $4\pi$  8.  $2 - \frac{2}{e}$  9.  $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$  10.  $2 - \frac{\pi}{2}$  11.  $\frac{1}{16}\pi a^4$  12.  $\frac{\pi^2}{4}$  13.  $\frac{1}{2} \log 3 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$  14.  $\frac{5e^3-2}{27}$  15.  $\frac{1+\sqrt{2}}{30}$  16.  $\frac{\pi}{6}(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})$ , substituce  $t = \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$  17.  $2\pi\sqrt{2}$ , např. substituce  $t = \operatorname{tg} x$  na  $(0, \frac{\pi}{2})$  18.  $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$  19.  $n!$

#### IV. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ A KVADRATICKÉ FORMY

JE  $L: U \rightarrow V$  LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ? POKUD ANO, JAK VYPADÁ  $\text{Ker}(L)$  A  $\text{Im}(L)$ ?

1.  $U = \mathbf{R}^3$ ,  $V = \mathbf{R}^4$ ; a)  $L(u, v, w) = [u + w, w - v + 7u, u, u]$ , b)  $L(u, v, w) = [u^2, v, 0, 0]$ , c)  $L(u, v, w) = [0, 0, 0, 0]$ ,  
d)  $L(u, v, w) = [u, v - 1, 4w, u + w]$ , e)  $L(u, v, w) = [u, v, w, w]$ , f)  $L(u, v, w) = [u + v, u - v, w, 10u]$ .
2.  $U = C(\mathbf{R})$ ,  $V = C(\mathbf{R})$ ; \*a)  $L(f)(x) = f(x + 1) - f(x)$ , b)  $L(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$ , c)  $L(f)(x) = f(x^2)$ ,  
\*d)  $L(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$ .
3.  $U = C^1(\mathbf{R})$ ,  $V = C(\mathbf{R})$ ; a)  $L(f)(x) = f'(x)$ , b)  $L(f)(x) = f(x) - f'(x)$ , c)  $L(f)(x) = \int_0^x f'(t) dt$ .

#### URČOVÁNÍ POVAHY KVADRATICKÝCH FOREM

4. Zjistěte, zda následující matice jsou pozitivně definitní, negativně definitní atd.

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ; d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ; f)  $\begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ;  
g)  $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; h)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ; i)  $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ; j)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. a) ANO,  $\text{Ker}(L) = \{[0, 0, 0]\}$ ,  $\text{Im}(L) = \text{lin}_{\mathbf{R}}\{[1, 7, 1, 1], [0, -1, 0, 0], [1, 1, 0, 0]\} = \{[a, b, c, d] \in \mathbf{R}^4 : c = d\}$ ; b) NE (např.  $L(2 \cdot [1, 0, 0]) \neq 2 \cdot L([1, 0, 0])$ ); c) ANO,  $\text{Ker}(L) = \mathbf{R}^3$ ,  $\text{Im}(L) = \{[0, 0, 0, 0]\}$ ; d) NE (např.  $L(0, 0, 0) \neq [0, 0, 0, 0]$ ); e) ANO,  $\text{Ker}(L) = \{[0, 0, 0]\}$ ,  $\text{Im}(L) = \text{lin}_{\mathbf{R}}\{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]\} = \{[a, b, c, d] \in \mathbf{R}^4 : c = d\}$ ; f) ANO,  $\text{Ker}(L) = \{[0, 0, 0]\}$ ,  $\text{Im}(L) = \text{lin}_{\mathbf{R}}\{[1, 1, 0, 10], [1, -1, 0, 0], [0, 0, 1, 0]\} = \{[a, b, c, d] \in \mathbf{R}^4 : d = 5(a + b)\}$ . 2. a) ANO,  $\text{Ker}(L)$  tvoří 1-periodické funkce,  $\text{Im}(L) = C(\mathbf{R})$  (mírně obtížnější); b) ANO,  $\text{Ker}(L) = \{0\}$ ,  $\text{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R}) : f(0) = 0\}$ ; c) ANO,  $\text{Ker}(L) = \{f \in C(\mathbf{R}) : f \upharpoonright \langle 0, +\infty \rangle = 0\}$ ,  $\text{Im}(L)$  tvoří sudé funkce z  $C(\mathbf{R})$ ; d) ANO,  $\text{Ker}(L)$  tvoří 2-periodické funkce splňující navíc  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ ,  $\text{Im}(L) = C^1(\mathbf{R})$  (obojí mírně obtížnější). 3. a) ANO,  $\text{Ker}(L)$  tvoří konstantní funkce,  $\text{Im}(L) = C(\mathbf{R})$ ; b) ANO,  $\text{Ker}(L) = \text{lin}_{\mathbf{R}}\{e^x\} = \{ae^x : a \in \mathbf{R}\}$ ,  $\text{Im}(L) = C(\mathbf{R})$ ; c) ANO,  $\text{Ker}(L)$  tvoří konstantní funkce,  $\text{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R}) : f(0) = 0\}$ . 4. a) ID, b) PD, c), d) PSD, ne PD; e) ID, f) ND, g) PD, h) PSD, ne PD, i), j) ID.

#### V. NALEZNĚTE LOKÁLNÍ EXTRÉMY NÁSLEDUJÍCÍCH FUNKCÍ V UVEDENÝCH MNOŽINÁCH:

1.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ ;  $M = \mathbb{R}^2$
2.  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ;  $M = \{(x, y) : x > 0; y > 0\}$
3.  $f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$ ;  $M = \{(x, y) : x > 0; y > 0\}$
- \*4.  $f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$ ;  $M = \mathbb{R}^2$
5.  $f(x, y) = 8 \log(x^2 + y^2 + 1) - 3xy$ ,  $M = \mathbb{R}^2$ .
6.  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ,  $M = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ .
7.  $f(x, y, z) = x^4 - y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ ,  $M = \mathbb{R}^2$
8.  $f(x, y) = e^x(x^2 - y^2 + xy)$ ,  $M = \mathbb{R}^2$ .
9. Dokažte, že funkce  $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$  nabývá lokálního maxima v nekonečně mnoha bodech, avšak lokálního minima ani v jednom bodě.

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1. Ostré lokální minimum v bodech  $[-1, -1]$  a  $[1, 1]$ ; sedlový bod  $[0, 0]$  (vyšetřte chování  $f$  v okolí počátku na přímkách  $y = 0$  a  $y = -x$ ). 2. Ostré lokální minimum v bodě  $[5, 2]$ . 3. Ostré lokální maximum v bodě  $[2, 3]$ . 4. Ostré lokální maximum v bodě  $[2, 3]$ , neostré lokální maximum v bodech  $[0, y]$  pro  $y < 0$  a pro  $y > 6$ , neostré lokální minimum v bodech  $[0, y]$  pro  $y \in (0, 6)$ , sedlové body  $[0, 6]$  a  $[x, 0]$  pro  $x \in \mathbb{R}$ . (Pro rozlišení neostrých extrémů a sedlových bodů vyšetřete znaménko  $f$ .) 5. Ostré lokální minimum v bodě  $[0, 0]$ , sedlové body  $[\sqrt{\frac{13}{6}}, \sqrt{\frac{13}{6}}]$  a  $[-\sqrt{\frac{13}{6}}, -\sqrt{\frac{13}{6}}]$ . 6. Ostré lokální minimum v bodě  $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ . 7. Nemá lokální extrém (sedlový bod  $[0, 0]$  – vyšetřte chování na přímkách procházejících počátkem). 8. Ostré lokální maximum v bodě  $[-2, -1]$ , sedlový bod  $[0, 0]$ . 9. Ostrá lokální maxima jsou v bodech  $[2k\pi, 0]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; sedlové body  $[(2k + 1)\pi, -2]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

VI. NAJDĚTE VLASTNÍ ČÍSLA A VŠECHNY JIM PŘÍSLUŠNÉ VLASTNÍ VEKTORY PRO MATICE

1.  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$    2.  $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$    3.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$    4.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$    5.  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6.  $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$    7.  $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$    8.  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$    9.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10.  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$    11.  $\begin{pmatrix} -23 & 21 & 3 & -17 \\ -40 & 35 & 4 & -31 \\ 58 & -50 & -5 & 47 \\ -8 & 6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. (ve formátu: (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů))

1.  $(1, 1, \{t \cdot [1, 2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ ,  $(2, 1, \{t \cdot [1, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .   2.  $(6, 1, \{t \cdot [2, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ ,  $(-5, 1, \{t \cdot [3, -4] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .   3.  $(1+i, 1, \{t \cdot [1, i] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ ,  $(1-i, 1, \{t \cdot [1, -i] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .  
4.  $(3, 2, \{t \cdot [1, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .   5.  $(1, 1, \{t \cdot [1, 1, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ ,  $(2, 1, \{t \cdot [1, 2, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ ,  $(3, 1, \{t \cdot [1, 1, 2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .   6.  $(1, 1, \{t \cdot [1, 1, 2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ ,  $(3, 2, \{t \cdot [1, 0, 1] + s \cdot [0, 1, 0] : [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$ .   7.  $(1, 1, \{t \cdot [1, 1, 2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ ,  $(3, 2, \{t \cdot [1, 2, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .  
8.  $(0, 3, \{t \cdot [1, 3, 0] + s \cdot [0, -1, 1] : [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$ .   9.  $(0, 3, \{t \cdot [1, 1, 2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .   10.  $(1, 3, \{t \cdot [1, 1, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$ .   11.  $(i, 2, \{t \cdot [3, 4, -5 + i, 0] + s \cdot [-7 - i, 0, -8 - 10i, 8] : [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$ ,  $(-i, 2, \{t \cdot [3, 4, -5 - i, 0] + s \cdot [-7 + i, 0, -8 + 10i, 8] : [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$ .

VII. NAJDĚTE TAYLORŮV POLYNOM  $k$ -TÉHO ŘÁDU V BODĚ 0 PRO FUNKCE

1.  $\operatorname{tg} x$ ,  $k = 4$ .   2.  $\cos(\sin x)$ ,  $k = 5$ .   3.  $\sin(\sin x)$ ,  $k = 6$ .   4.  $\sin(1 - \cos x)$ ,  $k = 3$ .   5.  $\operatorname{arctg} x$ ,  $k \in \mathbf{N}$ .   6.  $\arcsin x$ ,  $k \in \mathbf{N}$ .

SPOČTĚTE LIMITY

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$    8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$    9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$

10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$    11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$  ( $a > 0$ )   12.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$    14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x})$    15.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x^3 - x^2 + \frac{x}{2}) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1})$

16. Najděte  $a, b \in \mathbb{R}$ , aby  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a+b \cos x) \sin x}{x^4} = 0$ .

17. Najděte  $a, b \in \mathbb{R}$ , aby  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \sin x - b \operatorname{tg} x}{x^4} = 0$  a spočtěte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \sin x - b \operatorname{tg} x}{x^5}$ .

VÝSLEDKY A NÁVODY.   1.  $x + \frac{1}{3}x^3$    2.  $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$    3.  $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$    4.  $\frac{1}{2}x^2$    5.  $T_{2k-1}^0(x) = T_{2k}^0(x) = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j-1}} x^{2j-1}$ .   6.  $T_{2k-1}^0(x) = T_{2k}^0(x) = \sum_{j=1}^k \frac{(-1/2)^{j-1}}{2^{j-1}} x^{2j-1}$ .   7.  $-\frac{1}{12}$   
8.  $\frac{1}{3}$    9.  $\frac{1}{3}$  (lze i elementárně, pomocí vhodného rozšíření)   10.  $-\frac{1}{4}$  (lze i elementárně, pomocí dvojího vhodného rozšíření, takový postup je početně náročnější)   11.  $\log^2 a$    12. 0   13.  $\frac{1}{2}$   
14.  $\frac{1}{3}$    15.  $\frac{1}{6}$    16.  $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$    17.  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ , limita vyjde  $-\frac{1}{20}$