FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 2

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – LS 2023/2024

PŘÍKLADY KE KAPITOLE XI

Příklad 1. Ukažte, že na Banachově algebře $\ell^1(\mathbb{Z})$ (viz Příklad 12 ke Kapitole X) neexistuje involuce a ekvivalentní norma, se kterou by to byla C^*-algebra.

`Návod:` *Uvažte Gelfandovu transformaci (viz Příklad 41 ke Kapitole X) a ukažte, že její obor hodnot je vlastní hustý podprostor $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Následně použijte Větu XI.9.*

Příklad 2. Ukažte, že na Banachově algebře $L^1(\mathbb{R})$ (viz Příklad 14 ke Kapitole X) neexistuje involuce a ekvivalentní norma, se kterou by to byla C^*-algebra.

`Návod:` *Uvažte Gelfandovu transformaci a její vztah k Fourierově transformaci (viz Příklad 43 ke Kapitole X), použijte známý fakt, že Fourierova transformace není na $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ a Větu XI.9.*

Příklad 3. Nechť $A = \mathcal{C}(K)$, nechť $g \in A$ a nechť F je funkce spojitá na $\sigma(g) = g(K)$. Ukažte, že $\tilde{F}(g) = F \circ g$.

Příklad 4.
(1) Nechť A je komutativní C^*-algebra a $x \in A$. Ukažte, že x je samoadjungovaný, právě když $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.
(2) Platí tato ekvivalence i pro nekomutativní C^*-algebry?

`Návod:` *(1) Pro implikaci $\Rightarrow$ použijte Tvrzení XI.8. Pro opačnou implikaci si uvědomte, že tvrzení platí v $\mathcal{C}_0(T)$ a použijte Větu XI.9. (2) Protipříklad na implikaci $\Leftarrow$ najděte v maticové algebře M_2.*

Příklad 5. Nechť A je C^*-algebra. Řekneme, že prvek $x \in A$ je **nezáporný**, pokud je samoadjungovaný a $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Ukažte, že každý samoadjungovaný prvek lze vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných prvků.

`Návod:` *Použijte spojitý funkční kalkulus pro funkce $t \mapsto t^+$ a $t \mapsto t^-$.*

Příklad 6. Nechť A je C^*-algebra s jednotkou, $x \in A$ normální prvek a $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

(1) Ukažte, že $\widetilde{f}(x)$ je normální prvek.
(2) Ukažte, že $\widetilde{f}(x)$ je samoadjungovaný prvek, právě když funkce f nabývá pouze reálných hodnot.
(3) Ukažte, že $\widetilde{f}(x)$ je nezáporný prvek, právě když funkce f nabývá pouze nezáporných hodnot.
(4) Ukažte, že $\widetilde{f}(x)$ je invertibilní prvek, právě když funkce f nenabývá hodnoty 0.

Příklad 7. Nechť A je C^*-algebra a $x, y \in A$ jsou dva nezáporné prvky, které komutují (tj. $xy = yx$). Ukažte, že xy je také nezáporný prvek.

`Návod:` *Nechť B je uzavřená podalgebra A generovaná x a y. Pak B je komutativní C^*-algebra. Použijte Větu XI.9 a skutečnost, že tvrzení platí v $\mathcal{C}_0(\Omega)$.*

Příklad 8. Nechť A je C^*-algebra s jednotkou e a $x \in A$ je normální prvek. Označme B uzavřenou podalgebru A generovanou prvky x, x^*, e a B_0 uzavřenou podalgebru A generovanou prvky x, x^*.

(1) Ukažte, že $B = B_0$, právě když x je invertibilní v A.
(2) Nechť $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Ukažte, že $\tilde{f}(x) \in B$.
(3) Nechť $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Ukažte, že $\tilde{f}(x) \in B_0$, právě když buď x je invertibilní nebo $f(0) = 0$.

`Návod:` *(1) Implikace $\Leftarrow$ je zřejmá. Pokud x není invertibilní, odvoďte z Věty XI.15, že B_0 neobsahuje e. (2) Použijte Větu XI.14. (3) Implikace $\Leftarrow$ plyne z (1) a z Věty XI.15. Předpokládejme, že x není invertibilní (tj. $0 \in \sigma(x)$) a $f(0) \neq 0$. Protože funkční kalkulus je izomorfismus $\mathcal{C}(\sigma(x))$ na B a zároveň izomorfismus $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ na B_0, stačí si uvědomit, že $f \notin \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$.*

Příklad 9. Mějme stejnou situaci jako v Příkladu 8 a navíc nechť $f \in C(\sigma(x))$. Označme D uzavřenou podalgebru A generovanou prvky $\tilde{f}(x), \tilde{f}(x)^*, e$ a D_0 uzavřenou podalgebru A generovanou prvky $\tilde{f}(x), \tilde{f}(x)^*$.

(1) Ukažte, že $D \subset B$ a $D_0 \subset B_0$.
(2) Ukažte, že $D = D_0$, právě když f nenabývá nuly.
(3) Uvažme diagram

$$\begin{tikzcd} \Delta(B) \arrow[r, "h_x"] \arrow[d, "r"'] & \sigma(x) \arrow[d, "f"] \\ \Delta(D) \arrow[r, "h_{\tilde{f}(x)}"'] & \sigma(\tilde{f}(x)) \end{tikzcd} ,$$

kde $r(\varphi) = \varphi|_D$ pro $\varphi \in \Delta(B)$ a h_x a $h_{\tilde{f}(x)}$ jsou zobrazení z konstrukce spojitého kalkulu ve Větě XI.14, tj. $h_x(\varphi) = \varphi(x)$ a $h_{\tilde{f}(x)}(\psi) = \psi(\tilde{f}(x))$. Ukažte, že tento diagram komutuje, tj. $f \circ h_x = h_{\tilde{f}(x)} \circ r$.
(4) Z předchozího bodu odvoďte, že pro každou $g \in \mathcal{C}(\sigma(\tilde{f}(x)))$ platí $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \widetilde{g \circ f}(x)$.

`Návod:` *(2) Použijte Příklad 8(1). (3) Je třeba dokázat $\varphi(\tilde{f}(x)) = f(\varphi(x))$. K tomu použijte definici spojitého funkčního kalkulu a definici Gelfandovy transformace. (4) Použijte bod (3) a definici spojitého funkčního kalkulu.*

Příklad 10. Nechť A je C^*-algebra a $x \in A$ je nezáporný prvek.

(1) Ukažte, že existuje nezáporný prvek $y \in A$ splňující $y^2 = x$.
(2) Je takové y jednoznačně určeno?

`Návod:` *(1) Použijte spojitý kalkulus pro funkci $t \mapsto \sqrt{t}$ na prvek x. (2) Nechť z je nezáporný prvek splňující $z^2 = x$ a y je prvek získaný postupem z bodu (1). Pomocí Příkladu 9(4) aplikovaného na $f(t) = t^2$ a $g(t) = \sqrt{t}$ ukažte, že $z = y$.*