XII. Operátory na Hilbertových prostorech

Úmluva. V této kapitole uvažujeme Banachovy prostory nad tělesem komplexních čísel (pokud explicitně není řečeno jinak). Speciálně, pracujeme s komplexními Hilbertovými prostory.

XII.1 Více o omezených operátorech a jejich spektru

Poznámka:

- Je-li X Banachův prostor, pak $L(X)$ (s operací skládání a s operátorovou normou) je Banachova algebra. Proto všechny pojmy a věty z Kapitoly X (např. spektrum, rezolventní množina, holomorfní kalkulus aj.) je možné aplikovat v této algebře.
- Je-li H Hilbertův prostor, pak $L(H)$ je dokonce C^*-algebra (involuce je definovaná jako adjungovaný operátor), a tedy lze používat i pojmy a věty z Kapitoly XI (např. spojitý funkční kalkulus).

Definice. Nechť X je Banachův prostor, $T \in L(X)$ and $\lambda \in \sigma(T)$.

- Říkáme, že λ je **vlastní číslo** T, pokud $\lambda I - T$ není prostý, tj. pokud existuje $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$, pro které $Tx = \lambda x$ (pak x je **vlastní číslo** příslušné λ). Množinu vlastních čísel nazýváme **bodové spektrum** T a značíme $\sigma_p(T)$.
- Říkáme, že λ je **přibližné vlastní číslo** T, pokud existuje posloupnost jednotkových vektorů (x_n), pro kterou platí $(\lambda I - T)x_n \to \boldsymbol{o}$. Množina všech přibližných vlastních čísel se nazývá **přibližné bodové spektrum** T a značí se $\sigma_{ap}(T)$.
- Říkáme, že λ patří do **spojitého spektra** $\sigma_c(T)$, pokud $\lambda I - T$ je prostý, má hustý obor hodnot, ale není na.
- Říkáme, že λ patří do **zbytkového spektra** $\sigma_r(T)$ (též zvaného **compression spectrum**), pokud $\lambda I - T$ je prostý a jeho obor hodnot není hustý.

Tvrzení 1 (o podmnožninách spektra). *Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak platí:*

(a) $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.
(b) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$, *právě když* $\lambda I - T$ *je izomorfismus* X *do* X.
(c) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_r(T)$.
(d) $\sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))) = \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))$.
(e) $\lambda \in \sigma_r(T) \setminus \sigma_{ap}(T)$, *právě když* $\lambda I - T$ *je izomorfismus* X *na vlastní uzavřený podprostor* X.

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$.

- **Numerický range** T je množina
$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle\,; x \in H, \|x\| = 1\}.$$
- **Numerický poloměr** T je definován vzorcem
$$w(T) = \sup\{|\lambda|\,; \lambda \in W(T)\} = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|\,; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Lemma 2 (polarizační vzorec pro operátor). *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pro $x, y \in H$ platí:*

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\,\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\,\langle T(x-iy), x-iy\rangle\right)$$

Tvrzení 3 (vlastnosti numerického poloměru). *Nechť H je Hilbertův prostor.*

(a) *Numerický poloměr w je ekvivalentní norma na $L(H)$ splňující* $\frac{1}{2}\|T\| \le w(T) \le \|T\|$ *pro* $T \in L(H)$.

(b) *Pokud* $T \in L(H)$ *a pro každé* $x \in H$ *platí* $\langle Tx, x\rangle = 0$, *pak* $T = 0$.
(c) *Pokud* $S, T \in L(H)$ *a pro každé* $x \in H$ *platí* $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$, *pak* $S = T$.
(d) *Pro každé* $T \in L(H)$ *je* $W(T)$ *souvislá podmnožina* $\mathbb{C}$.
(e) *Pro každé* $T \in L(H)$ *je* $\sigma_p(T) \subset W(T)$ *a* $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.
(f) *Pro každé* $T \in L(H)$ *je* $w(T) \geq r(T)$.

Tvrzení 4 (struktura normálních operátorů). *Nechť* H *je Hilbertův prostor a* $T \in L(H)$. *Operátor* T *je normální, právě když pro každé* $x \in H$ *platí* $\|Tx\| = \|T^*x\|$. *Je-li* T *normální, pak platí následující tvrzení:*

(a) $\ker T = \ker T^*$ a $\ker T = (R(T))^\perp$.
(b) $R(T)$ *je hustý, právě když* T *je prostý. Tedy,* $\sigma_r(T) = \emptyset$ *a* $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.
(c) *Pokud* $\lambda \in \mathbb{C}$ *a* $x \in H$, *pak* $Tx = \lambda x$, *právě když* $T^*x = \overline{\lambda}x$. *Speciálně,*
$$\sigma_p(T^*) = \{\overline{\lambda}; \lambda \in \sigma_p(T)\}.$$
(d) *Jsou-li* $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$ *různá, pak* $\ker(\lambda_1 I - T) \perp \ker(\lambda_2 I - T)$.

Tvrzení 5 (spektrum samoadjungovaného operátoru). *Nechť* H *je Hilbertův prostor a* $T \in L(H)$.

(a) T *je samoadjungovaný, právě když* $W(T) \subset \mathbb{R}$.
(b) *Nechť* T *je samoadjungovaný. Položme* $a = \inf W(T)$ *a* $b = \sup W(T)$. *Pak* $\sigma(T) \subset [a, b]$, $a, b \in \sigma(T)$, $\|T\| = \max\{|a|, |b|\}$ *a* $\sigma(T)$ *obsahuje aspoň jedno z čísel* $\|T\|$, $-\|T\|$.
(c) $W(T) \subset [0, \infty)$, *právě když* T *je samoadjungovaný a* $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Poznámky a definice.

(1) Operátory splňující dvě ekvivalentní podmínky z Tvrzení 5(c) se nazývají **nezáporné**.
(2) T^*T je nezáporný operátor pro každé $T \in L(H)$.
(3) Pro $T \in L(H)$ definujeme $|T| = \sqrt{T^*T}$ (tj. aplikujeme spojitou funkci $t \mapsto \sqrt{t}$ na nezáporný operátor T^*T).
(4) Je-li T normální, výše definovaný operátor $|T|$ splývá s operátorem, který dostaneme aplikací spojité funkce $\lambda \mapsto |\lambda|$ na operátor T. Není-li T normální, pak $|T| \neq |T^*|$.

Věta 6 (polární rozklad). *Nechť* H *je Hilbertův prostor a* $T \in L(H)$. *Pak existuje právě jedna částečná izometrie* $U \in L(H)$ *splňující* $T = U|T|$ *a* $U = 0$ *na* $R(|T|)^\perp$.

Pak U^* *je také částečná izometrie a platí* $|T| = U^*T$ *a* $U^* = 0$ *na* $R(T)^\perp$.

Poznámka: Jak bylo řečeno na počátku kapitoly, vše uvedené platí pro komplexní prostory. Pro reálné prostory některé z uvedených tvrzení platí ve stejné formě, některé v pozměněné formě a některé vůbec. Podrobněji:

- Adjungovaný operátor se v reálném případě definuje zcela stejně. Tvrzení 4 platí pro reálné prostory s upravenou formulací.
- Spektrum z principu uvažujeme jen pro komplexní prostory, v reálném případě (i λ bychom uvažovali reálné) by mohlo být prázdné. Numerický range a poloměr samozřejmě můžeme definovat i v reálném případě. Ale Lemma 2 v reálném případě neplatí (ani žádná jeho analogie). To souvisí s tím, že body (a)-(c) z Tvrzení 3 ani body (a),(c) z Tvrzení 5 v reálném případě neplatí. Může se totiž stát, že nenulový operátor má nulový numerický poloměr.
- V reálném případě některá tvrzení zůstávají v platnosti alespoň pro samoadjungované operátory (například Tvrzení 5(b)). Více se tomu budeme věnovat později, v závěru kapitoly XIII.