## X.4 Ideály, komplexní homomorfismy a Gelfandova transformace

**Definice.** Nechť $A$ je Banachova algebra. **Ideálem** v $A$ rozumíme vlastní vektorový podprostor $I \subset A$ takový, že kdykoli $x \in I$ a $y \in A$, platí $xy \in I$ a $yx \in I$. **Maximálním ideálem** v algebře $A$ rozumíme ideál, který je maximální vzhledem k inkluzi.

**Poznámky:**

(1) Každý ideál je zároveň vlastní podalgebrou. Vlastní podalgebra nemusí být ideálem.
(2) Zkoumají se i **levé ideály** (definované implikací $x \in I, y \in A \Rightarrow yx \in I$) a **pravé ideály** (definované analogicky). Pak ideál je podprostor, který je zároveň levý ideál i pravý ideál. My se však jednostrannými ideály zabývat nebudeme.
(3) Banachova algebra $A$ (přesněji $\{(a,0); a \in A\}$) je ideálem v algebře $A^+$.

**Tvrzení 19** (vlastnosti ideálů a maximálních ideálů). *Nechť $A$ je Banachova algebra s jednotkou.*

(a) *Je-li $I$ ideál v $A$, je $I \cap G(A) = \emptyset$.*
(b) *Uzávěr ideálu v $A$ je též ideálem v $A$.*
(c) *Každý ideál $I$ v $A$ je obsažen v maximálním ideálu $J$.*
(d) *Každý maximální ideál v $A$ je uzavřený.*

**Příklady 20.**

(1) *Je-li $X$ nekonečněrozměrný Banachův prostor, pak $K(X)$ je uzavřený ideál v Banachově algebře $L(X)$.*
(2) *Jediný ideál v maticové algebře $M_n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) je nulový ideál.*
(3) *Nechť $K$ je kompaktní Hausdorffův prostor. Pak všechny uzavřené ideály v Banachově algebře $\mathcal{C}(K)$ jsou podprostory tvaru*
$$\{f \in \mathcal{C}(K); f|_F = 0\}, \text{ kde } F \subset K \text{ je neprázdná uzavřená množina.}$$

**Tvrzení 21** (faktorizace algeber). *Je-li $A$ Banachova algebra a $I$ je uzavřený ideál v $A$, pak Banachův kvocient $A/I$ je Banachova algebra se součinem $q(x)q(y) = q(xy)$, kde $q$ je kvocientové zobrazení Banachova prostoru $A$ na Banachův prostor $A/I$. Je-li $A$ komutativní, je i $A/I$ komutativní. Má-li $A$ jednotku, má i $A/I$ jednotku.*

**Definice.**

- Nechť $A, B$ jsou Banachovy algebry. Zobrazení $h : A \to B$ nazýváme **homomorfismem Banachových algeber** (krátce **homomorfismem**), pokud je lineární a navíc $h(xy) = h(x)h(y)$ pro $x, y \in A$.
- **Komplexním homomorfismem** na Banachově algebře $A$ rozumíme homomorfismus $h : A \to \mathbb{C}$.
- Označme $\Delta(A)$ množinu všech nenulových komplexních homomorfismů na $A$.

**Poznámky:**

(1) V definici homomorfismu Banachových algeber není požadavek spojitosti. V některých důležitých případech je homomorfismus spojitý automaticky (viz například Tvrzení 22 a Tvrzení XI.6).
(2) Je-li $h : A \to B$ homomorfismus Banachových algeber, který není identicky roven nule, pak jeho jádro je ideálem v algebře $A$.
(3) Z předchozí poznámky a z Příkladu 20(2) plyne, že pro $n \geq 2$ je $\Delta(M_n) = \emptyset$.
(4) Kvocientové zobrazení z Tvrzení 21 je homomorfismem Banachových algeber.

**Tvrzení 22** (vlastnosti komplexních homomorfismů). *Nechť $A$ je Banachova algebra a nechť $h \in \Delta(A)$.*

- *Má-li $A$ jednotku $e$, pak platí:*
  (a) $h(e) = 1$ a $\|h\| = 1$;
  (b) $\ker h$ *je maximální ideál v $A$;*
  (c) *je-li $x \in G(A)$, je $h(x) \neq 0$.*
- *Pro obecnou Banachovu algebru $A$ (s jednotkou či bez) platí:*
  (d) *Existuje právě jedno $\tilde{h} \in \Delta(A^+)$, které rozšiřuje $h$ (tj. splňuje $\tilde{h}(x,0) = h(x)$ pro $x \in A$);*
  (e) $\|h\| \leq 1$;
  (f) $h(x) \in \sigma(x)$ *pro $x \in A$.*

**Tvrzení 23** (vlastnosti $\Delta(A)$). *Nechť $A$ je Banachova algebra.*

(a) *Má-li $A$ jednotku, je $\Delta(A)$ slabě* kompaktní podmnožina jednotkové sféry $S_{A^*}$.*
(b) $\Delta(A^+) = \{\tilde{h}; h \in A\} \cup \{h_\infty\}$, *kde $\tilde{h}$ je rozšíření $h$ dané Tvrzením 22(d) a $h_\infty(x,\lambda) = \lambda$ pro $(x,\lambda) \in A^+$.*
(c) *Pokud $A$ nemá jednotku, je $\Delta(A)$ podmnožina jednotkové koule $B_{A^*}$ a $\Delta(A) \cup \{\boldsymbol{o}\}$ je slabě* kompaktní. Speciálně, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní ve slabé* topologii.*

**Tvrzení 24** (komplexní homomorfismy a maximální ideály). *Nechť $A$ je Banachova algebra s jednotkou.*

(1) *Je-li $I$ ideál v $A$ kodimenze jedna, pak existuje jediné $h \in \Delta(A)$, pro které $I = \ker h$.*
(2) *Je-li $A$ komutativní, pak $h \mapsto \ker h$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v $A$.*

**Definice.** Nechť $A$ je komutativní Banachova algebra.

- Nechť $x \in A$. Pro $h \in \Delta(A)$ položme $\hat{x}(h) = h(x)$. Pak funkci $\hat{x} : \Delta(A) \to \mathbb{C}$ nazýváme **Gelfandovou transformací prvku** $x$. Z definic snadno plyne, že $\hat{x}$ je spojitá komplexní funkce na $\Delta(A)$, navíc z Tvrzení 23(c) vidíme, že $\hat{x} \in \mathcal{C}_0(\Delta(A))$.
- **Gelfandovou transformací algebry** $A$ rozumíme zobrazení $\Gamma : A \to \mathcal{C}_0(\Delta(A))$ definované předpisem $\Gamma(x) = \hat{x}$, $x \in A$.

**Věta 25** (vlastnosti Gelfandovy transformace). *Nechť $A$ je komutativní Banachova algebra a $\Gamma : A \to \mathcal{C}_0(\Delta(A))$ její Gelfandova transformace. Dále, nechť $\Gamma^+ : A^+ \to \mathcal{C}(\Delta(A^+))$ je Gelfandova transformace algebry $A^+$. K popisu $\Delta(A^+)$ použijme Tvrzení 23(b) (včetně značení).*

(a) *$\Gamma$ je homomorfismus algebry $A$ do algebry $C_0(\Delta(A))$.*
(b) *Pro $(x,\lambda) \in A^+$ platí*

$$\begin{aligned} \Gamma^+(x,\lambda)(\tilde{h}) &= \Gamma(x)(h) + \lambda \quad \textit{for } h \in \Delta(A), \\ \Gamma^+(x,\lambda)(h_\infty) &= \lambda. \end{aligned}$$

(c) *Má-li $A$ jednotku, pak*

$$\ker \Gamma = \operatorname{rad}(A) := \bigcap \{I : I \textit{ je maximální ideál v } A\}.$$

*Speciálně, $\Gamma$ je prostá (tj. je to izomorfismus algeber $A$ a $\Gamma(A) = \hat{A}$), právě když $\operatorname{rad}(A) = \{0\}$ (tj. $A$ je* **polojednoduchá***).*
(d) *$\Gamma$ je prostá, právě když $\Gamma^+$ je prostá.*
(e) *Má-li $A$ jednotku, pak pro každé $x \in A$ platí $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma(x)$.*
(f) *Nemá-li $A$ jednotku, pak pro každé $x \in A$ platí $\sigma(x) = \hat{x}(\Delta(A)) \cup \{0\}$.*
(g) *Pro každé $x \in A$ platí $\|\hat{x}\| = r(x)$.*
(h) *$\Gamma$ je spojitý homomorfismus, splňuje $\|\Gamma\| \leq 1$.*
(i) *$\Gamma$ je topologický izomorfismus algeber $A$ a $\Gamma(A)$, právě když $\Gamma$ je prostá (viz* (c,d)*) a $\hat{A} = \Gamma(A)$ je uzavřená.*
(j) *$\Gamma(A)$ odděluje body $\Delta(A)$.*