X. Banachovy algebry a Gelfandova transformace

Úmluva: V této kapitole budeme všechny Banachovy prostory uvažovat nad tělesem komplexních čísel (pokud nebude explicitně řečen opak).

Poznámka: Zkoumá se i reálná verze teorie v této kapitole, je však dosti odlišná.

X.1 Banachovy algebry – základní pojmy a vlastnosti

Definice.

- **Algebrou** rozumíme (komplexní) vektorový prostor A, na němž je navíc definovaná operace násobení $\cdot$ s vlastnostmi:
  - $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pro $x, y, z \in A$;
  - $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pro $x, y, z \in A$;
  - $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ pro $x, y, z \in A$;
  - $\alpha \cdot (x \cdot y) = (\alpha \cdot x) \cdot y = x \cdot (\alpha \cdot y)$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$ a $x, y \in A$.
- Algebra A se nazývá **komutativní**, je-li násobení na ní komutativní, tj. pokud
  - $x \cdot y = y \cdot x$ pro $x, y \in A$.
- Nechť A je algebra. Prvek $e \in A$ se nazývá
  - **levá jednotka**, pokud $e \cdot x = x$ pro $x \in A$;
  - **pravá jednotka**, pokud $x \cdot e = x$ pro $x \in A$;
  - **jednotka**, pokud $e \cdot x = x \cdot e = x$ pro $x \in A$.
- Nechť A je algebra, na které je navíc definovaná norma $\|\cdot\|$, která splňuje
  - $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pro $x, y \in A$.

  Pak A se nazývá **normovaná algebra**.
- **Banachovou algebrou** rozumíme normovanou algebru A, která je úplná v metrice generované normou.

Poznámky:

(1) Algebra může mít více levých jednotek nebo více pravých jednotek.
(2) Má-li algebra levou jednotku i pravou jednotku, pak se rovnají. Speciálně, algebra má nejvýše jednu jednotku.
(3) Pokud A je netriviální normovaná algebra s jednotkou e (netriviální znamená $A \neq \{\boldsymbol{o}\}$), pak $\|e\| \geq 1$.

Příklady 1 (příklady Banachových algeber).

(1) *Těleso komplexních čísel je Banachova algebra s jednotkou.*
(2) *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor, pak $\mathcal{C}(K)$, prostor všech komplexních spojitých funkcí na K se supremovou normou a bodovým násobením (tj. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ pro $f, g \in \mathcal{C}(K)$ a $x \in K$) je komutativní Banachova algebra, jejíž jednotkou je funkce konstantně rovna jedné.*
(3) *Nechť T je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, který není kompaktní (například $T = \mathbb{R}^n$). Nechť prostor*

$$\mathcal{C}_0(T) = \{f : T \to \mathbb{C} \text{ spojitá}; \forall \varepsilon > 0 : \{x \in T; |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ je kompaktní podmnožina } T\}$$

je opatřen supremovou normou a bodovým násobením. Pak $\mathcal{C}_0(T)$ je komutativní Banachova algebra bez jednotky.
(4) *Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť M_n je prostor všech komplexních čtvercových matic řádu n opatřený maticovou normou a maticovým násobením. Pak M_n je Banachova algebra s jednotkou. Jednotkou je jednotková matice. Pokud $n \geq 2$, není M_n komutativní.*

(5) *Nechť X je Banachův prostor a $L(X)$ je prostor všech omezených operátorů na X opatřený operátorovou normou. Definujeme-li na $L(X)$ násobení jako skládání operátorů (tj. $S \cdot T = S \circ T$ pro $S, T \in L(X)$), pak $L(X)$ je Banachova algebra s jednotkou. Jednotkou je identické zobrazení. Pokud* $\dim X \geq 2$, *pak algebra $L(X)$ není komutativní.*

(6) *Nechť X je Banachův prostor a $K(X)$ je prostor všech kompaktních operátorů na X. Pak $K(X)$ je uzavřená podalgebra $L(X)$, je to tedy Banachova algebra. Algebra $K(X)$ má jednotku, právě když X má konečnou dimenzi. $K(X)$ je komutativní, právě když* $\dim X = 1$.

(7) *Banachův prostor $L^1(\mathbb{R}^n)$, na němž definujeme násobení jako konvoluci, je komutativní Banachova algebra bez jednotky.*

(8) *Banachův prostor $\ell^1(\mathbb{Z})$, na němž definujeme násobení $*$ (kterému říkáme též konvoluce) vzorcem*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} * (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$

je komutativní Banachova algebra s jednotkou. Jednotkou je kanonický vektor $\boldsymbol{e}_0$.

(9) *Nechť μ je normalizovaná Lebesgueova míra na intervalu $[0, 2\pi)$ (tj. $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$, kde λ je Lebesgueova míra na $[0, 2\pi)$). Pak Banachův prostor $L^1(\mu)$, na němž definujeme násobení $*$ (kterému říkáme též konvoluce) vzorcem*

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{[0,2\pi)} f(y) g((x-y) \mod 2\pi) \,\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(y) g((x-y) \mod 2\pi) \,\mathrm{d}y, \quad f, g \in L^1(\mu), x \in [0, 2\pi), \end{aligned}$$

je komutativní Banachova algebra bez jednotky.

Tvrzení 2 (přidání jednotky).

(a) *Nechť A je algebra. Nechť A^+ značí vektorový prostor $A \times \mathbb{C}$, na kterém definujeme násobení vzorcem*

$$(x, \lambda) \cdot (y, \mu) = (x \cdot y + \lambda y + \mu x, \lambda\mu), \quad (x, \lambda), (y, \mu) \in A^+.$$

Pak A^+ je algebra a prvek $(\boldsymbol{o}, 1)$ je její jednotkou. Navíc $\{(a, 0); a \in A\}$ je podalgebra A^+, která je izomorfní algebře A.

(b) *Je-li A Banachova algebra, pak A^+ je Banachova algebra s jednotkou, pokud normu definujeme vzorcem $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$, $(x, \lambda) \in A^+$. Navíc $\{(a, 0); a \in A\}$ je pak uzavřená podalgebra A^+, která je izometricky izomorfní Banachově algebře A.*

Poznámky:

(1) Algebraická struktura algebry A^+ je jednoznačně určena, norma na A^+ nikoli. Uvedená norma je jednou z možností, později uvidíme jiné možnosti, které jsou ve speciálních případech přirozené.

(2) Přidání jednotky se provádí zejména v případě, že A jednotku nemá. Lze však provést i v případě, že A jednotku má. Pokud A má jednotku e, pak A^+ má jednotku $(\boldsymbol{o}, 1)$ a prvek $(e, 0)$ jednotkou není. Tento prvek je však jednotkou podalgebry $\{(a, 0), a \in A\}$.

Tvrzení 3 (přenormování Banachovy algebry). *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je netriviální Banachova algebra s jednotkou e. Pak na A existuje ekvivalentní norma $|||\cdot|||$ taková, že $(A, |||\cdot|||)$ je opět Banachova algebra a navíc $|||e||| = 1$.*

Úmluva: **Banachovou algebrou s jednotkou** nadále budeme rozumět netriviální Banachovu algebru, která má jednotku a norma jednotky je rovna jedné.

Tvrzení 4 (základní vlastnosti Banachových algeber). *Nechť A je Banachova algebra. Pak platí:*

(a) $x \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \cdot x = \boldsymbol{o}$ *pro* $x \in A$.
(b) *Násobení je spojité jako zobrazení $A \times A$ do A.*

Definice. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e.

- Prvek $y \in A$ se nazývá **inverzním prvkem** (nebo jen **inverzí**) prvku $x \in A$, pokud

$$x \cdot y = y \cdot x = e.$$

- Prvek $x \in A$ se nazývá **invertibilní**, jestliže k němu existuje inverzní prvek.
- Množinu všech invertibilních prvků A značíme $G(A)$.

Poznámka. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e a $x \in A$. Pokud $y \in A$ splňuje $x \cdot y = e$, nazýváme jej **pravou inverzí** prvku x; splňuje-li $y \cdot x = e$, nazýváme jej **levou inverzí**. Prvek x může mít více různých pravých inverzí, stejně tak může mít více různých levých inverzí. Pokud však má pravou inverzi i levou inverzi, pak je invertibilní. Jeho inverzní prvek je jednoznačně určen a je zároveň jedinou pravou inverzí a jedinou levou inverzí. Inverzní prvek k prvku x pak značíme x^{-1}.

Tvrzení 5 (o násobení invertibilních prvků). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e.*

(a) *Nechť $x, y \in G(A)$. Pak $x \cdot y \in G(A)$ a $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.*
(b) *$G(A)$ s operací násobení je grupa.*
(c) *Pokud $x_1, \dots, x_n \in A$ komutují (tj. $x_j \cdot x_k = x_k \cdot x_j$ pro $j, k \in \{1, \dots, n\}$), pak $x_1 \cdots x_n \in G(A)$, právě když $\{x_1, \dots, x_n\} \subset G(A)$.*

Lemma 6 (Neumannova řada). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e.*

(a) *Nechť $x \in A$ a $\|x\| < 1$. Pak $e - x \in G(A)$ a navíc*

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

přičemž uvedená řada konverguje absolutně.

(b) *Je-li $x \in G(A)$, $h \in A$ a $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, pak $x + h \in G(A)$ a navíc platí*

$$(x + h)^{-1} = x^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (h \cdot x^{-1})^n \qquad \text{a} \qquad \|(x + h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}\|^2 \|h\|}{1 - \|x^{-1}\| \|h\|}.$$

Věta 7 (topologické vlastnosti grupy invertibilních prvků). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak*

(1) *$G(A)$ je otevřená podmnožina A,*
(2) *zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfismus $G(A)$ na $G(A)$,*
(3) *je-li (x_n) posloupnost prvků $G(A)$, která v A konverguje k $x \notin G(A)$, pak $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.*