

X.7 Normální neomezené operátory

Definice. Hustě definovaný uzavřený operátor T na Hilbertově prostoru se nazývá **normální**, jestliže $T^*T = TT^*$.

Lemma 38 (o T^*T). Necht' T je uzavřený a hustě definovaný operátor na H . Pak platí:

- (a) $I + T^*T$ je bijekce $D(T^*T)$ na H .
- (b) Označme B inverzní operátor k $I + T^*T$ a $C = TB$. Pak B a C patří do $L(H)$ a mají normu nejvýš jedna. Navíc, B je nezáporný.
- (c) T^*T je samoadjungovaný a T je uzávěrem $T|_{D(T^*T)}$.

Lemma 39. Necht' T je normální operátor na H . Pak platí:

- (a) $D(T) = D(T^*)$
- (b) Pro $x \in D(T)$ platí $\|Tx\| = \|T^*x\|$.
- (c) Je-li $S \supset T$ normální, pak $S = T$.

Věta 40 (spektrální rozklad neomezeného normálního operátoru). Je-li T normální operátor na H , pak existuje právě jedna abstraktní spektrální míra E v H , že $T = \int \text{id} dE$. Tato míra se získá následujícím způsobem: Necht' B je operátor z Lemmatu 38. Pro $j \in \mathbb{N}$ necht' $P_j = \chi_{(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]}(B)$. Pak TP_j je omezený normální operátor, necht' E^j je jeho spektrální míra a \mathcal{A}_j příslušná σ -algebra. Pak hledaná míra E je rovna

$$E(A)x = \sum_{j=1}^{\infty} E^j(A)P_jx, \quad x \in H, A \in \mathcal{A} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j.$$

Důsledek 41. Necht' T je normální operátor na H . Pak T je omezený, právě když $\sigma(T)$ je omezená množina.

Důsledek 42. Necht' E je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru H definovaná na σ -algebře \mathcal{A} . Necht' $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je \mathcal{A} -měřitelná funkce a $T = \int f dE$. Pak T je normální operátor a jeho spektrální míra (tj. míra z Věty 40) je obrazem míry E při funkci f (ve smyslu Lemmatu 35).