X.6 Spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru

Připomenutí: Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť

$$f \mapsto \tilde{f}(T), \quad f \in C(\sigma(T)),$$

označuje spojitý funkční kalkulus (podle oddílu VIII.6). Pro každou dvojici $x, y \in H$ nechť $E_{x,y}$ je komplexní Radonova míra na $\sigma(T)$ taková, že platí

$$\left\langle \tilde{f}(T)x, y \right\rangle = \int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}E_{x,y} \,, \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Pak platí:

(1) $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pro $x, y \in H$,
(2) $E_{x,x} \geq 0$ pro každé $x \in H$,
(3) zobrazení $x \mapsto E_{x,y}$ je lineární pro každé $y \in H$,
(4) zobrazení $y \mapsto E_{x,y}$ je sdruženě lineární pro každé $x \in H$.

Označme $\mathcal{A}_T$ σ-algebru podmnožin $\sigma(T)$, které jsou $E_{x,y}$-měřitelné pro všechna $x, y \in H$. Je-li nyní $h : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ omezená $\mathcal{A}_T$-měřitelná funkce, pak symbolem $\tilde{h}(T)$ značíme jediný prvek $L(H)$ splňující

$$\left\langle \tilde{h}(T)x, y \right\rangle = \int_{\sigma(T)} h \, \mathrm{d}E_{x,y}.$$

Zobrazení $h \mapsto \tilde{h}(T)$ se nazývá **měřitelný kalkulus** operátoru T. Pro $A \in \mathcal{A}_T$ označme

$$E_T(A) = \widetilde{\chi_A}(T).$$

Pak $E_T(A)$ je ortogonální projekce. Zobrazení $A \mapsto E_T(A)$ se nazývá **spektrální míra** operátoru T.

Zobrazení E_T rozšíříme na σ-algebru $\{A \subset \mathbb{C}; A \cap \sigma(T) \in \mathcal{A}_T\}$ podmnožin $\mathbb{C}$ vzorcem $E_T(A) = E_T(A \cap \sigma(T))$.

Tvrzení 31. *Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor. Pak E_T je abstraktní spektrální míra.*

Tvrzení 32. *Nechť E je abstraktní spektrální míra definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$, $g \in L^\infty(E)$ a $T = \int g \, \mathrm{d}E$. Pak spektrální míra operátoru T je daná vzorcem*

$$E_T(A) = E(g^{-1}(A)) \text{ pro } A \in \mathcal{A}_T = \{A \subset \mathbb{C}; g^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}.$$

Věta 33 (spektrální rozklad omezeného normálního operátoru). *Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor. Pak platí:*

(a) *$T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E_T$. Navíc, jedinou abstraktní spektrální mírou E, pro kterou $T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E$, je E_T.*

(b) *Je-li g omezená $\mathcal{A}$-měřitelná funkce, pak $\tilde{g}(T) = \int g\, \mathrm{d}E_T$.*

Lemma 34. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H. Nechť E je spektrální míra operátoru C_T. Pak*

$$T = \int i \frac{1+z}{1-z}\, \mathrm{d}E(z).$$

Lemma 35 (o obrazu spektrální míry). *Nechť F je abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$ a $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je $\mathcal{A}$-měřitelné zobrazení. Označme*

$$\mathcal{A}' = \{A \subset \mathbb{C} : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$$

a pro $A \in \mathcal{A}'$ položme

$$E(A) = F(\varphi^{-1}(A)).$$

Pak E je abstraktní spektrální míra v H a pro každou $\mathcal{A}'$-měřitelnou funkci f platí

$$\int f\, \mathrm{d}E = \int f \circ \varphi\, \mathrm{d}F.$$

Věta 36 (spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru). *Je-li T samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H, pak existuje jediná abstraktní spektrální míra E v H taková, že $T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E$.*

Tato míra E je obrazem spektrální míry operátoru C_T při borelovském zobrazení $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$.

Důsledek 37. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H. Pak T je omezený, právě když $\sigma(T)$ je omezená množina.*