

X.5 Integrál podle spektrální míry

Definice. Abstraktní spektrální mírou v Hilbertově prostoru H rozumíme zobrazení E s následujícími vlastnostmi:

- (i) Definičním oborem E je nějaká σ -algebra \mathcal{A} podmnožin \mathbb{C} , která obsahuje všechny borelovské množiny.
- (ii) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $E(A)$ ortogonální projekce na H .
- (iii) $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{C}) = I$.
- (iv) Je-li $A \in \mathcal{A}$ takové, že $E(A) = 0$, pak pro každou $B \subset A$ platí $B \in \mathcal{A}$ (a $E(B) = 0$).
- (v) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$
- (vi) $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$.
- (vii) Pro každou dvojici $x, y \in H$ je zobrazení $E_{x,y} : A \mapsto \langle E(A)x, y \rangle$ komplexní borelovská míra na \mathbb{C} .

Poznámka. Borelovskou mírou výše rozumíme (komplexní) míru μ definovanou na σ -algebře \mathcal{A} obsahující borelovské množiny takovou, že pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny B a C , pro které platí $B \subset A \subset C$ a $|\mu|(C \setminus B) = 0$.

Lemma 25 (vlastnosti spektrální míry). *Nechť E je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru H definovaná na σ -algebře \mathcal{A} . Pak platí:*

- (a) Zobrazení $x \mapsto E_{x,y}$ je lineární pro každé $y \in H$.
- (b) Zobrazení $y \mapsto E_{x,y}$ je sdruženě lineární pro každé $x \in H$.
- (c) Pro $x, y \in H$ platí $E_{y,x} = \overline{E_{x,y}}$.
- (d) Pro každé $x \in H$ je $E_{x,x}$ nezáporná míra.
- (e) Pro $x, y \in H$ platí $E_{x,y} = \frac{1}{4}(E_{x+y,x+y} - E_{x-y,x-y} + iE_{x+iy,x+iy} - iE_{x-iy,x-iy})$.
- (f) Pro $x, y \in H$ a $A \in \mathcal{A}$ platí $|E_{x,y}(A)| \leq \sqrt{E_{x,x}(A) \cdot E_{y,y}(A)} \leq \frac{1}{2}(E_{x,x}(A) + E_{y,y}(A))$.
- (g) Pro každé $x, y \in H$ platí $E_{x+y,x+y} \leq 2(E_{x,x} + E_{y,y})$
- (h) Pro každé $x, y \in H$ platí $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Poznámka. V definici abstraktní spektrální míry stačí v bodě (vii) předpokládat, že pro každé $x \in H$ je $E_{x,x}$ borelovská míra na \mathbb{C} .

Tvrzení 26. *Nechť E je abstraktní spektrální míra v separabilním Hilbertově prostoru H . Pak pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny B a C , pro které platí $B \subset A \subset C$ a $E(C \setminus B) = 0$.*

Poznámka. Někdy se spektrální míra definuje jen pro separabilní prostory H . Pak se definuje jen na σ -algebře borelovských množin a vynechává se podmínka (iv). Pro neseparabilní H je třeba použít výše uvedenou definici.

Definice. Nechť E je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru H definovaná na σ -algebře \mathcal{A} .

- Položme $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A}; E(A) = 0\}$.
- Označme $L^\infty(E)$ prostor všech omezených \mathcal{A} -měřitelných funkcí na \mathcal{C} , přičemž ztotožňujeme funkce, které se rovnají až na množinu z \mathcal{N} (tj. *E -skoro všude*). Uvažujme na $L^\infty(E)$ normu

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup}_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)| = \inf\{c > 0; \{\lambda \in \mathbb{C}; f(\lambda) > c\} \in \mathcal{N}\}.$$

Pak $L^\infty(E)$ je komutativní C^* -algebra (s bodovým násobením, involuce je definována jako komplexní sdružení).

Věta 27 (integrál omezené funkce dle spektrální míry). *Je-li E abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ -algebře \mathcal{A} a $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je omezená \mathcal{A} -měřitelná funkce, pak existuje právě jeden operátor $\Phi_0(f) \in L(H)$, pro který platí*

$$\langle \Phi_0(f)x, y \rangle = \int f \, dE_{x,y} \quad x, y \in H.$$

Dále platí:

- (a) Φ_0 je izometrický $*$ -izomorfismus C^* -algebry $L^\infty(E)$ do $L(H)$.
- (b) Pro každé $f \in L^\infty(E)$ je $\sigma(\Phi_0(f)) = \text{ess rng}(f)$.
- (c) Pro každou $f \in L^\infty(E)$ je operátor $\Phi_0(f)$ normální. Navíc, $\Phi_0(f)$ je samoadjungovaný, právě když f je reálná (E -skoro všude) a $\Phi_0(f)$ je nezáporný, právě když $f \geq 0$ E -skoro všude.
- (d) $\|\Phi_0(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \, dE_x}$ pro $x \in H$.
- (e) Je-li $f \in L^\infty(E)$ a $g \in \mathcal{C}(\sigma(\Phi_0(f)))$, pak $\Phi_0(g \circ f) = \tilde{g}(\Phi_0(f))$.

Věta 28 (integrál (obecně neomezené) funkce dle spektrální míry). *Nechť E je abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ -algebře \mathcal{A} , a $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nechť je \mathcal{A} -měřitelná funkce. Označme*

$$D(\Phi(f)) = \{x \in H : \int |f|^2 \, dE_{x,x} < \infty\}.$$

Pak $D(\Phi(f))$ je hustý lineární podprostor H . Navíc existuje jediný operátor $\Phi(f)$ na H s definičním oborem $D(\Phi(f))$, který splňuje

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int f \, dE_{x,y}, \quad x, y \in D(\Phi(f)).$$

Navíc platí:

$$\|\Phi(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \, dE_{x,x}}, \quad x \in D(\Phi(f)).$$

Značení: Operátor $\Phi(f)$ z předchozí věty značíme $\int f \, dE$ a nazýváme **integrálem funkce f podle spektrální míry E** .

Věta 29 (vlastnosti $\int f \, dE$). *Je-li E abstraktní spektrální míra v H a f, g jsou \mathcal{A} -měřitelné funkce, pak platí:*

- (a) $\Phi(f) + \Phi(g) \subset \Phi(f + g)$;
- (b) $\Phi(f)\Phi(g) \subset \Phi(fg)$ a $D(\Phi(f)\Phi(g)) = D(\Phi(g)) \cap D(\Phi(fg))$.
- (c) $\Phi(f)^* = \Phi(\bar{f})$ a $\Phi(f)\Phi(f)^* = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^*\Phi(f)$, speciálně $\Phi(f)$ je **normální**.
- (d) $\Phi(f)$ je uzavřený operátor.
- (e) $\Phi(f)$ je spojitý, právě když f je esenciálně omezená, tj. existuje $A \in \mathcal{A}$, že $E(\mathbb{C} \setminus A) = 0$ a f je omezená na A .

Tvrzení 30 (spektrum $\int f \, dE$). *Je-li E abstraktní spektrální míra, f \mathcal{A} -měřitelná funkce a $T = \int f \, dE$, pak*

$$\sigma(T) = \text{ess rng}(f) := \mathbb{C} \setminus \bigcup \{G \subset \mathbb{C} : G \text{ otevřená, } E(f^{-1}(G)) = 0\}.$$

Navíc pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ je $\ker(\lambda I - T) = R(E(f^{-1}(\{\lambda\})))$. Speciálně, λ je vlastní číslo operátoru T , právě když $E(f^{-1}(\lambda)) \neq 0$.