## X.4 Symetrické operátory a Cayleyova transformace

**Definice.** Nechť $S$ je symetrický (ne nutně hustě definovaný) operátor na $H$. Označme symbolem $C_S$ operátor

$$C_S = (S - iI)(S + iI)^{-1}.$$

Pak $C_S$ je operátor na $H$, který se nazývá **Cayleyova transformace operátoru** $S$.

**Věta 21** (vlastnosti $C_S$). *Nechť $S$ je symetrický operátor na $H$ a $C_S$ je jeho Cayleyova transformace. Pak*

(a) *$C_S$ je lineární izometrie $D(C_S) = R(S + iI)$ na $R(C_S) = R(S - iI)$.*
(b) *$I - C_S = 2i(S + iI)^{-1}$; speciálně, operátor $I - C_S$ je prostý a $R(I - C_S) = D(S)$.*
(c) *$S = i(I + C_S)(I - C_S)^{-1}$.*
(d) *$C_S$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ $S$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ $D(C_S)$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ $R(C_S)$ je uzavřený.*

**Lemma 22** (o izometrickém operátoru). *Nechť $U$ je libovolný operátor na $H$, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Pak*

(a) *$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro všechna $x, y \in D(U)$. Speciálně: $U$ je unitární, právě když je $D(U) = R(U) = H$.*
(b) *$\mathrm{Ker}(I - U) = D(U) \cap (R(I - U))^{\perp}$. Speciálně, je-li $R(I - U)$ hustý v $H$, je $I - U$ prostý.*

**Věta 23** (obraz Cayleyovy transformace). *Nechť $U$ je operátor na $H$, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Předpokládejme, že $I - U$ je prostý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je symetrický a platí $C_S = U$. Přitom $S$ je hustě definovaný, právě když $R(I - U)$ je hustý.*

**Věta 24** (Cayleyova transformace pro samoadjungované operátory).

(a) *Nechť $S$ je symetrický operátor na $H$. Pak $S$ je samoadjungovaný, právě když $C_S$ je unitární operátor.*
(b) *Nechť $U$ je unitární operátor na $H$, pro který je $I - U$ prostý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je samoadjungovaný a platí $C_S = U$.*

**Poznámky.**

(1) Nechť $S$ a $T$ jsou symetrické operátory na $H$. Pak $S \subset T$, právě když $C_S \subset C_T$.
(2) Nechť $S$ je hustě definovaný uzavřený symetrický operátor na $H$. Pak kodimenze podprostorů $D(C_S)$ a $R(C_S)$ (tj. dimenze jejich ortogonálních doplňků) nazýváme **indexy defektu** operátoru $T$. Pak platí:
   - $T$ je samoadjungovaný, právě když oba indexy defektu jsou nulové.
   - $T$ je maximální symetrický operátor, právě když aspoň jeden z indexů defektu je nulový.
   - $T$ má samoadjungované rozšíření, právě když oba indexy defektu jsou stejné (tj., právě když existuje lineární izometrie $(D(C_S))^{\perp}$ na $(R(C_S))^{\perp}$).
(3) Nechť $S$ je uzavřený symetrický operátor na $H$, ne nutně hustě definovaný. I v tomto případě lze definovat indexy defektu a platí výše uvedené ekvivalence, jen důkaz je o něco obtížnější. Navíc platí:
   - Pokud $D(C_S) = H$ nebo $R(C_S) = H$, pak $S$ je hustě definovaný.