X.2 Spektrum neomezeného operátoru

Úmluva. V této sekci uvažujeme všechny Banachovy prostory nad $\mathbb{C}$.

Definice.

- Nechť X je Banachův prostor. **Operátorem na** X budeme rozumět operátor z X do X.
- Nechť T je operátor na X.
  - **Rezolventní množinou** operátoru T rozumíme množinu všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které operátor $\lambda I - T$ je prostý, na a $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$. Značíme ji $\rho(T)$.
  - **Rezolventou** (nebo **rezolventní funkcí**) operátoru T rozumíme zobrazení

$$\lambda \mapsto R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(T).$$

  - **Spektrem** operátoru T rozumíme množinu $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Poznámky.

(1) Pokud T není uzavřený, pak $\rho(T) = \emptyset$ a $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

(2) Rezolventní množina se někdy definuje jiným způsobem. Někdy se požaduje

  (a) jen aby operátor $\lambda I - T$ byl prostý a na;

někdy se požaduje,

  (b) aby operátor $\lambda I - A$ byl prostý, aby měl hustý obor hodnot a inverzní operátor aby byl spojitý.

Je-li T uzavřený, pak všechny tři definice jsou ekvivalentní; pro neuzavřené operátory dávají různé pojmy. Pokud operátor T není uzavřený, ale má uzavřené rozšíření, pak jeho rezolvetní množina podle možnosti (b) se rovná rezolventní množině operátoru $\overline{T}$; rezolventní množina podle možnosti (a) je s rezolventní množinou $\overline{T}$ disjunktní.

Tvrzení 8 (vlastnosti rezolventy, rezolventní množiny a spektra). *Nechť T je operátor na X.*

(a) *Nechť $\mu \in \rho(T)$. Pak pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|(\mu I - T)^{-1}\|}$ platí $\lambda \in \rho(T)$ a*

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \mu)^n ((\mu I - T)^{-1})^{n+1}.$$

(b) *$\rho(T)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$ a $\sigma(T)$ je uzavřená podmnožina $\mathbb{C}$.*

(c) *Rezolventní funkce $\lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$ je spojitá na $\rho(T)$.*

(d) *Pro každé $f \in X^*$ a každé $x \in X$ je funkce $\lambda \mapsto f((\lambda I - T)^{-1} x)$ holomorfní na $\rho(T)$.*

Lemma 9 (prázdné spektrum a T^{-1}). *Je-li T uzavřený operátor na X, pro který platí $\sigma(T) = \emptyset$, pak $T^{-1} \in L(X)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.*