XI.4 Slabě kompaktní množiny a operátory v Banachových prostorech

Připomenutí, definice a poznámky: Nechť T je Hausdorffův úplně regulární prostor a $A \subset T$.

- Množina A se nazývá **kompaktní**, pokud z každého pokrytí A otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí. Dále platí, že A je kompaktní, právě když každý net v A má hromadný bod v A.
- Nechť $(x_\nu)_{\nu\in\Lambda}$ je net v T. Připomeňme, že $x \in T$ je hromadným bodem netu, jestliže pro každé okolí U bodu x a každé $\nu_0 \in \Lambda$ existuje $\nu \geq \nu_0$, pro které $x_\nu \in U$. Dále,

$$
\begin{aligned}
x \text{ je hromadným bodem netu } (x_\nu)_{\nu\in\Lambda} &\iff x \in \bigcap_{\nu_0\in\Lambda} \overline{\{x_\nu; \nu \geq \nu_0\}} \\
&\iff \text{existuje podnet netu } (x_\nu)_{\nu\in\Lambda}\text{, který konverguje k } x.
\end{aligned}
$$

- Množina A se nazývá **relativně kompaktní**, pokud její uzávěr $\overline{A}$ je kompaktní podmnožinou T. Přitom platí, že A je relativně kompaktní, právě když každý net v A má hromadný bod v T.
- Říkáme, že A je **spočetně kompaktní**, pokud z každého spočetného pokrytí A otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí. Platí, že A je spočetně kompaktní, právě když každá posloupnost v A má hromadný bod v A.
- Připomeňme, že

$$
\begin{aligned}
x \text{ je hromadným bodem posloupnosti } (x_n) &\iff x \in \bigcap_{n_0\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n; n \geq n_0\}} \\
&\iff \text{existuje podnet posloupnosti } (x_n)\text{, který konverguje k } x.
\end{aligned}
$$

- Říkáme, že A je **relativně spočetně kompaktní**, pokud každá posloupnost v A má hromadný bod v T.
- Říkáme, že A je **sekvenciálně kompaktní**, pokud každá posloupnost v A má podposloupnost, která konverguje k nějakému bodu A.
- Říkáme, že A je **relativně sekvenciálně kompaktní**, pokud každá posloupnost v A má podposloupnost, která konverguje k nějakému bodu T.

Poznámka: Mezi definovanými pojmy platí následující implikace a žádné jiné.

$$
\begin{array}{ccccc}
A \text{ kompaktní} & \Rightarrow & A \text{ spočetně kompaktní} & \Leftarrow & A \text{ sekvenciálně kompaktní} \\
\Downarrow & & & & \\
\overline{A} \text{ kompaktní} & \Rightarrow & \overline{A} \text{ spočetně kompaktní} & \Leftarrow & \overline{A} \text{ sekvenciálně kompaktní} \\
\Updownarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
A \text{ relativně kompaktní} & \Rightarrow & A \text{ relativně spočetně kompaktní} & \Leftarrow & A \text{ rel. sekvenciálně kompaktní}
\end{array}
$$

Speciálně, uzávěr relativně spočetně kompaktní množiny nemusí být spočetně kompaktní a uzávěr relativně sekvenciálně kompaktní množiny nemusí být sekvenciálně kompaktní.
Poznámka: Je-li T metrický prostor a $A \subset T$, pak platí

$$
(*) \quad \left\{
\begin{array}{ccccc}
A \text{ kompaktní} & \Leftrightarrow & A \text{ spočetně kompaktní} & \Leftrightarrow & A \text{ sekvenciálně kompaktní} \\
A \text{ relativně kompaktní} & \Leftrightarrow & A \text{ relativně spočetně kompaktní} & \Leftrightarrow & A \text{ relativně sekvenciálně kompaktní}
\end{array}
\right.
$$

Definice. Nechť T je Hausdorffův úplně regulární topologický prostor. Řekneme, že T je **andělský**, pokud pro každou relativně spočetně kompaktní podmnožinu $A \subset T$ platí:

(i) A je relativně kompaktní;
(ii) pro každé $x \in \overline{A}$ existuje posloupnost (x_n) v A, která konverguje k x.

Poznámka: Každý metrický prostor je andělský.

Lemma 25. *Nechť T je andělský prostor. Pak pro každou množinu $A \subset T$ platí ekvivalence $(*)$.*

Věta 26.

(a) *Je-li K kompaktní Hausdorffův prostor, je prostor $(\mathcal{C}(K), \tau_p)$ andělský.*
(b) *Je-li X Banachův prostor, pak prostor (X, w) je andělský*

Theorem 26 can be proved by combining the following three results.

Lemma 27. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor a $A \subset \mathcal{C}(K)$ je τ_p-relativně spočetně kompaktní. Pak $\overline{A}^{\tau_p}$ je τ_p-kompaktní podmnožina $\mathcal{C}(K)$.*

Věta 28 (Kaplansky). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor, $f \in \mathcal{C}(K)$ a $A \subset \mathcal{C}(K)$. Jestliže $f \in \overline{A}^{\tau_p}$, pak existuje spočetná množina $C \subset A$ splňující $f \in \overline{C}^{\tau_p}$. (Tj. $(\mathcal{C}(K), \tau_p)$ má* **spočetnou těsnost***.)*

Tvrzení 29. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor a $A \subset \mathcal{C}(K)$. Jestliže (A, τ_p) je kompaktní a separabilní, pak je metrizovatelná.*

Věta 30 (Eberlein-Šmulyan). *Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *A je relativně slabě kompaktní.*
(ii) *A je relativně slabě spočetně kompaktní.*
(iii) *A je relativně slabě sekvenciálně kompaktní.*

Stejně tak jsou ekvivalentní následující podmínky:

(i') *A je slabě kompaktní.*
(ii') *A je slabě spočetně kompaktní.*
(iii') *A je slabě sekvenciálně kompaktní.*

Věta 31 (Grothendieck). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor a $A \subset \mathcal{C}(K)$ je omezená množina.*

(a) *A je relativně slabě kompaktní, právě když je relativně τ_p-kompaktní.*
(b) *A je slabě kompaktní, právě když je τ_p-kompaktní.*

Definice. Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Operátor T se nazývá **slabě kompaktní**, pokud $\overline{TB_X}$ je slabě kompaktní.

Tvrzení 32. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$.*

(a) *T je slabě kompaktní, právě když pro každou omezenou posloupnost (x_n) v X existuje podposloupnost posloupnosti (Tx_n), která je slabě konvergentní.*
(b) *Je-li T kompaktní, pak je slabě kompaktní.*
(c) *Je-li X nebo Y reflexivní, pak T je slabě kompaktní.*

Věta 33 (Gantmacher). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *T je slabě kompaktní.*
(ii) *Duální operátor T' je slabě kompaktní.*
(iii) *Duální operátor T' je spojitý z (Y^*, w^*) do (X^*, w).*
(iv) *$T''(X^{**}) \subset \varkappa(Y)$.*

Věta 34 (Krein). *Nechť X je Banachův prostor a $K \subset X$ je slabě kompaktní. Pak $\overline{\operatorname{aco} K}$ je též slabě kompaktní.*

Poznámka: Platí netriviální **Jamesova věta**:

Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X$ slabě uzavřená množina (to je splněno například, je-li A uzavřená konvexní). Pokud pro každé $f \in X^*$ platí, že $\operatorname{Re} f$ nabývá maxima na A, pak A je slabě kompaktní.