XI.3 Kompaktní konvexní množiny

Úmluva: V tomto oddílu uvažujeme jen vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Nejde o žádnou újmu, neboť všechny definice i výsledky jsou použitelné i pro komplexní prostor, protože se používá jen struktura jeho reálné verze.

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je konvexní množina. Řekneme, že bod $x \in A$ je **extremálním bodem** množiny A, jestliže není vnitřním bodem žádné úsečky ležící v A, tj. platí-li

$$\forall a, b \in A \; \forall t \in (0,1) : x = ta + (1-t)b \Rightarrow a = b = x.$$

Množinu všech extremálních bodů množiny A značíme $\operatorname{ext} A$.

Poznámka. Bod $x \in A$ je extremálním bodem konvexní množiny A, právě když není středem žádné nedegenerované úsečky v A, tj. právě když

$$\forall a, b \in A : x = \frac{1}{2}(a+b) \Rightarrow a = b = x.$$

Příklady 16. *Nechť $X = \mathbb{R}^2$. Pak platí:*

(1) *Je-li $A \subset \mathbb{R}^2$ konvexní mnohoúhelník, pak jeho extremálními body jsou právě jeho vrcholy.*
(2) *Je-li $A \subset \mathbb{R}^2$ uzavřený kruh, pak množinou $\operatorname{ext} A$ je jeho hraniční kružnice.*
(3) *Je-li $A \subset \mathbb{R}^2$ otevřený kruh, pak $\operatorname{ext} A = \emptyset$.*

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je konvexní množina. Podmnožinu $F \subset A$ nazveme **hranou** množiny A, pokud platí následující dvě podmínky:

- F je neprázdná konvexní podmnožina A;
- $\forall a, b \in A : \frac{1}{2}(a+b) \in F \Rightarrow a \in F \;\&\; b \in F$.

Lemma 17 (vlastnosti hran). *Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je konvexní množina.*

(a) *$x \in A$ je extremálním bodem množiny A, právě když $\{x\}$ je hranou množiny A.*
(b) *Je-li $F_1 \subset A$ hrana množiny A a $F_2 \subset F_1$ je hrana množiny F_1, pak F_2 je hranou množiny A.*
(c) *Pokud navíc X je HLCS a A je kompaktní množina obsahující alespoň dva body, pak existuje uzavřená hrana $F \subsetneq A$.*

Věta 18 (Krein-Milman). *Nechť X je HLCS a $K \subset X$ je konvexní kompaktní množina. Pak*

$$K = \overline{\operatorname{co} \operatorname{ext} K}.$$

Speciálně, je-li K neprázdná, pak $\operatorname{ext} K \neq \emptyset$.

Tvrzení 19 (Minkowski-Carathéodory). *Nechť X je HLCS dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $K \subset X$ je neprázdná kompaktní konvexní množina. Pak $K = \operatorname{co} \operatorname{ext} K$. Dokonce platí, že každý bod K lze vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše $n+1$ extremálních bodů K a tyto body lze volit afinně nezávislé.*

Příklad 20. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor a $P(K)$ je množina Radonových pravděpodobností na K uvažovaná jako podmnožina $(\mathcal{C}(K)^*, w^*)$. Pak $P(K)$ je kompaktní konvexní množina a její extremální body jsou právě Diracovy míry.*

Tvrzení 21 (Milman). *Nechť X je HLCS a $K \subset X$ je konvexní kompaktní množina. Pokud $A \subset K$ splňuje $K = \overline{\operatorname{co} A}$, pak $\operatorname{ext} K \subset \overline{A}$.*

Tvrzení 22 (o těžišti míry). *Nechť X je HLCS a $K \subset X$ je kompaktní konvexní množina.*

(a) *Pro každou $\mu \in P(K)$ existuje právě jeden bod $x \in K$ splňující*

$$\forall f : K \to \mathbb{R} \text{ spojitou afinní} : f(x) = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Toto x se nazývá **těžiště** *μ a značí se $r(\mu)$.*

(b) *Zobrazení $r : \mu \mapsto r(\mu)$ je spojité afinní zobrazení $P(K)$ na K.*

Věta 23 (Krein-Milmanova věta o integrální reprezentaci). *Nechť X je HLCS a $K \subset X$ je kompaktní konvexní množina. Pak pro každé $x \in K$ existuje $\mu \in P(K)$ splňující $\mu(\overline{\operatorname{ext} K}) = 1$ a $x = r(\mu)$.*

Tvrzení 24. *Nechť X je HLCS a $K \subset X$ je kompaktní konvexní množina.*

(a) *Je-li K metrizovatelný, pak $\operatorname{ext} K$ je G_δ podmnožina K.*

(b) *Pokud $\dim X \leq 2$, pak $\operatorname{ext} K$ je uzavřená podmnožina K.*

Poznámka. Existuje kompaktní konvexní množina $K \subset \mathbb{R}^3$, pro kterou množina $\operatorname{ext} K$ není uzavřená.

Poznámka. Platí následující Choquetova věta zesilující Větu 23 v případě metrizovatelného K:

Nechť X je HLCS a $K \subset X$ je metrizovatelná kompaktní konvexní množina. Pak pro každé $x \in K$ existuje $\mu \in P(K)$ splňující $\mu(\operatorname{ext} K) = 1$ a $x = r(\mu)$.

Existuje verze této věty i pro nemetrizovatelné K, její formulace je však složitější.