XI.2 bw^*-topologie a Krein-Šmulyanova věta

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že množina $A \subset X^*$ je bw^*-**otevřená**, jestliže pro každé $r > 0$ je $A \cap rB_{X^*}$ (relativně) w^*-otevřená v rB_{X^*}.

Lemma 10. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak systém všech bw^*-otevřených podmnožin X^* tvoří topologii, která je jemnější než w^*-topologie.*

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak systém všech bw^*-otevřených podmnožin X^* se nazývá bw^*-**topologie**.

Tvrzení 11. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak bw^*-topologie na X^* splývá s topologií stejnoměrné konvergence na posloupnostech v X, které (v normě) konvergují k nule.*

Věta 12 (Banach-Dieudonné). *Nechť X je normovaný lineární prostor a nechť $\varkappa : X \to X^{**}$ značí kanonické vnoření. Pak*

$$(X^*, bw^*)^* = \overline{\varkappa(X)}.$$

Jinými slovy, duál k (X^*, bw^*) lze ztotožnit se zúplněním X. Speciálně,

$$(X^*, bw^*)^* = \varkappa(X) \iff X \text{ je úplný.}$$

Důsledek 13 (Krein-Šmulyan). *Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X^*$ je konvexní množina. Pak platí*

$$A \text{ je } w^*\text{-uzavřená} \iff \forall r > 0 : A \cap rB_{X^*} \text{ je } w^*\text{-uzavřená.}$$

Důsledek 14 (Banach-Dieudonné). *Nechť X je Banachův prostor a f je lineární funkcionál na X^* (tj. $f \in (X^*)^\#$. Pak*

$$f \in \varkappa(X) \iff f|_{B_{X^*}} \text{ je } w^*\text{-spojitý.}$$

Věta 15. *Nechť X je Banachův prostor. Označme $K = (B_{X^*}, w^*)$. Pak K je kompaktní Hausdorffův prostor. Definujme zobrazení $J : X \to \mathcal{C}(K)$ předpisem $J(x) = \varkappa(x)|_K$. Pak J je lineární izometrie X do $\mathcal{C}(K)$, homeomorfismus (X, w) do $(\mathcal{C}(K), \tau_p)$ a navíc je $J(X)$ τ_p-uzavřené v $\mathcal{C}(K)$.*

Poznámky. Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X^*$ je konvexní množina. Pak $\overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{w^*}$. Nicméně, může se stát, že

$$\bigcup_{r>0} \overline{A \cap rB_{X^*}}^{w^*} \subsetneq \overline{A}^{w^*},$$

a to i když A je podprostor. To ilustruje rozlišení následujících případů:

Nechť $Y \subset\subset X^*$. Definujme pseudonormu q_Y na X předpisem

$$\tilde{q}_Y(x) = \sup\{|f(x)| \,;\, f \in Y \;\&\; \|f\| \le 1\},$$

tj. $\tilde{q}_Y = q_{B_{X^*} \cap Y}$. Pak platí:

(1) $\tilde{q}_Y$ je norma na $X \iff \overline{Y}^{w^*} = X^*$.

(2) $\tilde{q}_Y = \|\cdot\| \iff \overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*} = B_{X^*}$. V tom případě říkáme, že Y je 1-**normující** podprostor X^*.

(3) $\tilde{q}_Y$ je ekvivalentní norma na $X \iff \exists r > 0 : \overline{Y \cap B_{X^*}}^{w^*} \supset \frac{1}{r} B_{X^*}$ $\iff \bigcup_{r>0} \overline{Y \cap rB_{X^*}}^{w^*} = X^*$. V tom případě říkáme, že Y je **normující** (nebo podrobněji r-**normující**, kde r je číslo z druhé podmínky) podprostor X^*.