X. Neomezené operátory na Hilbertových prostorech
X.1 Pojem neomezeného operátoru mezi Banachovými prostory

Definice. Nechť X a Y jsou Banachovy prostory nad $\mathbb{F}$.

- **Operátorem z** X **do** Y rozumíme lineární zobrazení $T : D(T) \to Y$, kde $D(T)$ (**definiční obor** operátoru T) je vektorový podprostor prostoru X.
- Obor hodnot operátoru T, tj. množinu $T(D(T))$, značíme $R(T)$.
- Operátor T z X do Y nazveme **hustě definovaný**, pokud jeho definiční obor $D(T)$ je hustý v X.
- **Grafem operátoru** T rozumíme množinu

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T) \;\&\; Tx = y\}.$$

- Operátor T se nazývá **uzavřený**, pokud jeho graf $G(T)$ je uzavřená množina v $X \times Y$, tj. pokud pro každou posloupnost (x_n) v $D(T)$, pro kterou platí
  - $x_n \to x$ pro nějaké $x \in X$,
  - $Tx_n \to y$ pro nějaké $y \in Y$;

  platí $x \in D(T)$ a $Tx = y$.
- Nechť S a T jsou operátory z X do Y. Píšeme $S \subset T$, pokud $G(S) \subset G(T)$; tj. pokud $D(S) \subset D(T)$ a pro každé $x \in D(S)$ platí $Tx = Sx$. Operátor T se pak nazývá **rozšířením** operátoru S.
- Nechť S a T jsou operátory z X do Y. Jejich **součtem** rozumíme operátor $S + T$ s definičním oborem $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ definovaný vzorcem $(S + T)x = Sx + Tx$ pro $x \in D(T + S)$.
- Nechť T je operátor z X do Y a $\alpha \in \mathbb{F}$. Pokud $\alpha = 0$, pak operátorem αT rozumíme nulový operátor definovaný na X, pokud $\alpha \neq 0$, pak operátorem αT rozumíme operátor definovaný vzorcem $(\alpha T)x = \alpha \cdot Tx$ na $D(\alpha T) = D(T)$.
- Nechť T je operátor z X do Y a S je operátor z Y do Banachova prostoru Z, pak jejich složením rozumíme operátor ST s definičním oborem

$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\}$$

  definovaný vzorcem $(ST)(x) = S(T(x))$ pro $x \in D(ST)$.
- Je-li T prostý operátor z X do Y, **inverzním operátorem k** T rozumíme operátor T^{-1} z Y do X, jehož definičním oborem je $D(T^{-1}) = R(T)$ a který je inverzním zobrazením k T.

Příklady 1.

(1) *Nechť $D(T) = \mathcal{C}^1([0, 1]) \subset\subset \mathcal{C}([0, 1])$ a $T(f) = f'$ pro $f \in D(T)$. Pak T je uzavřený hustě definovaný operátor z $\mathcal{C}([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$.*

(2) *Nechť $D(U) = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]); f'(0) = 0\} \subset\subset \mathcal{C}([0, 1])$ a $U(f) = f'$ pro $f \in D(U)$. Pak U je uzavřený hustě definovaný operátor z $\mathcal{C}([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$ a platí $U \subsetneqq T$, kde T je operátor z příkladu (1).*

(3) *Nechť $D(S)$ je podprostor $\mathcal{C}([0, 1])$ tvořený polynomy a $S(f) = f'$ pro $f \in D(S)$. Pak T je hustě definovaný operátor z $\mathcal{C}([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$, který není uzavřený, má však uzavřené rozšíření (a to operátor T z příkladu (1)).*

(4) *Nechť $D(T)$ je podprostor ℓ^2 tvořený vektory s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi. Pro $x = (x_n) \in D(T)$ položme $Tx = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, 0, 0, \dots)$. Pak T je hustě definovaný operátor z ℓ^2 do ℓ^2, který nemá uzavřené rozšíření.*

Lemma 2 (o grafu operátoru). *Podmnožina $L \subset X \times Y$ je grafem nějakého operátoru z X do Y, právě když je to lineární podprostor splňující*

$$\{(x, y) \in L : x = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Tvrzení 3. *Pro operátory R, S, T mezi Banachovými prostory (pro které mají uvedené operace smysl), platí:*

(i) $(R+S)+T = R+(S+T)$;
(ii) $(RS)T = R(ST)$;
(iii) $(R+S)T = RT+ST$ *a* $T(R+S) \supset TR+TS$. *Pokud* T *je všude definovaný, platí* $T(R+S) = TR+TS$.

Tvrzení 4 (o uzavřených operátorech). *Nechť* T *je operátor z* X *do* Y.

(a) *Je-li* T *uzavřený a* $D(T) = X$, *pak* $T \in L(X, Y)$.
(b) T *má uzavřené rozšíření, právě když* $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ *v* $D(T) \times Y$ *implikuje* $y = 0$.
(c) *Je-li* T *uzavřený a prostý, pak* T^{-1} *je také uzavřený.*

Značení. Je-li T operátor z X do Y, který má uzavřené rozšíření, pak symbolem $\overline{T}$ značíme jeho minimální uzavřené rozšíření, tj. operátor, jehož graf $G(\overline{T})$ je roven $\overline{G(T)}$, uzávěru grafu T v $X \times Y$.

Tvrzení 5. *Nechť* T *je uzavřený operátor z* X *do* Y. *Pak platí:*

(a) *Je-li* $S \in L(X, Y)$, *pak* $S+T$ *je uzavřený operátor a* $D(S+T) = D(T)$.
(b) *Je-li* $S \in L(Y, Z)$, *pak* $D(ST) = D(T)$. *Pokud* S *je je navíc izomorfismus* Y *do* Z, *pak* ST *je uzavřený.*
(c) *Je-li* $S \in L(Z, X)$, *pak* TS *je uzavřený.*

Příklady 6.

(1) *Nechť* $X = \mathcal{C}([0,1])$, $D(T) = \mathcal{C}^1([0,1])$, $T(f) = f'$ *pro* $f \in D(T)$ *a* $Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\frac{1}{n})$ *pro* $f \in \mathcal{C}([0,1])$ *(výsledkem je konstantní funkce). Pak* T *je hustě definovaný a uzavřený,* $S \in L(X)$ *a přitom* ST *nemá uzavřené rozšíření.*
(2) *Nechť* $X = \ell^2$, $Y = \{(x_n) \in \ell^2; \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2 < \infty\}$. *Pro* $(x_n) \in Y$ *položme*

$$T((x_n)) = (0, x_1, 2x_2, 3x_3, \dots),$$
$$S((x_n)) = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, -x_1, -2x_2, -3x_3, \dots).$$

Pak S *i* T *jsou hustě definované uzavřené operátory, ale* $S+T$ *nemá uzavřené rozšíření.*

Tvrzení 7 (o inverzi k uzavřenému operátoru). *Nechť* T *je prostý uzavřený operátor z* X *do* Y. *Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $R(T) = Y$ *a* $T^{-1} \in L(Y, X)$.
(ii) $R(T) = Y$.
(iii) $R(T)$ *je hustý v* Y *a* T^{-1} *je spojitý na* $R(T)$.

Poznámka. Pro neuzavřené operátory podmínky z předchozího tvrzení nejsou ekvivalentní. Podrobněji: Je-li T operátor z X do Y, který není uzavřený, pak:

- Podmínka (i) platit nemůže.
- Podmínka (ii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (iii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor $\overline{T}$ není prostý.
- Podmínka (iii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (ii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor $\overline{T}$ splňuje ekvivalentní podmínky z předchozího tvrzení.