FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2021/2022

PŘÍKLADY KE KAPITOLE I

K oddílu I.1 – lineární topologie a jejich generování

Příklad 1. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ neprázdná množina. Ukažte, že A je konvexní, právě když pro každé $\alpha, \beta > 0$ platí $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Příklad 2. Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{T}$ je topologie na X.

(1) Ukažte, že $\mathcal{T}$ je translačně invariantní, právě když sčítání na X je odděleně spojité (tj. pro každé $y \in X$ je $x \mapsto x + y$ spojité).
(2) Najděte X a $\mathcal{T}$ tak, aby sčítání bylo spojité (v obou proměnných, jako zobrazení $X \times X \to X$), ale násobení nebylo spojité.
(3) Nechť $\mathcal{T}$ je translačně invariantní. Ukažte, že sčítání je spojité (v obou proměnných), právě když pro každé okolí nuly U existuje okolí nuly V splňující $V + V \subset U$.
(4) Najděte topologii na $\mathbb{R}^2$, v níž je sčítání odděleně spojité, nikoli však spojité.
(5) Nechť $\mathcal{T}$ je translačně invariantní a existuje báze okolí nuly z konvexních množin. Ukažte, že zobrazení $x \mapsto \frac{x}{2}$ je spojité.
(6) Nechť $\mathcal{T}$ je translačně invariantní a existuje báze okolí nuly z konvexních množin. Ukažte, že sčítání je spojité, právě když je spojité zobrazení $x \mapsto 2x$.
(7) Nechť $\mathcal{T}$ je translačně invariantní a existuje báze okolí nuly z konvexních množin. Musí být zobrazení $x \mapsto 2x$ spojité?
(8) Předpokládejme, že sčítání je spojité. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je spojité zobrazení $x \mapsto nx$.

`Návod:` *(2) Uvažte diskrétní topologii. (4) Uvažte například bázi okolí nuly* $\{(0,0)\} \cup \{(x,y); |y| < |x| < r\}$, $r > 0$.

Příklad 3. Nechť X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní metrika na X.

(1) Ukažte, že sčítání je spojité (v obou proměnných) v metrice ρ.
(2) Ukažte na protipříkladu, že topologie generovaná metrikou ρ nemusí být lineární.
(3) Ukažte, že ρ generuje lineární topologii na X, právě když

$$\lim_{x \to \boldsymbol{o}} \sup_{\lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| \leq 1} \rho(\lambda x, \boldsymbol{o}) = 0 \text{ a } \forall x \in X \colon \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x, \boldsymbol{o}) = 0.$$

`Návod:` *(1) Buď použijte bod (3) z předchozího příkladu, nebo charakterizaci spojitosti pomocí posloupností. V obou případech použijte trojúhelníkovou nerovnost.*

Příklad 4. Nechť X je vektorový prostor. Nechť $\mathcal{U}$ je systém všech absolutně konvexních pohlcujících množin.

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly v nějaké Hausdorffově lokálně konvexní topologii $\mathcal{T}$ na X.
(2) Ukažte, že tato topologie $\mathcal{T}$ je nejsilnější lokálně konvexní topologie na X.
(3) Ukažte, že každá konvergentní posloupnost v $(X, \mathcal{T})$ je obsažena v podprostoru konečné dimenze.

`Návod:` *(3) Kdyby ne, pak existuje lineárně nezávislá posloupnost (x_n), která konverguje k nule. Doplňme ji na algebraickou bázi. Pak popište absolutně konvexní pohlcující množinu, která neobsahuje žádný z vektorů x_n.*

Příklad 5. (1) Nechť $A \subset \mathbb{R}^2$ je vyvážená a pohlcující. Ukažte, že $A + A$ je okolím nuly (ve standardní topologii).
(2) Najděte vyváženou pohlcující $A \subset \mathbb{R}^2$, která není okolím nuly.
(3) Z předchozích dvou bodů odvoďte, že systém všech vyvážených pohlcujících podmnožin $\mathbb{R}^2$ není bází okolí nuly v žádné lineární topologii na $\mathbb{R}^2$.

`Návod:` *(1) Ukažte, že $A + A$ obsahuje obdélník tvaru $[-a, a] \times [-b, b]$.*

Příklad 6. (1) Ukažte, že konvexní obal vyvážené podmnožiny vektorového prostoru je vyvážený, a tedy absolutně konvexní.
(2) Ukažte, že vyvážený obal konvexní množiny nemusí být konvexní.

`Návod:` *(2) Uvažte vhodnou úsečku v $\mathbb{R}^2$.*

Příklad 7. Nechť X je prostor všech lebesgueovsky měřitelných funkcí na $[0, 1]$ (s hodnotami v $\mathbb{F}$; ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude). Pro $f, g \in X$ položme

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \min\{1, |f - g|\}.$$

(1) Ukažte, že ρ je metrika, která na X generuje lineární topologii.
(2) Ukažte, že konvergence posloupností v metrice ρ splývá s konvergencí v míře.
(3) Je výsledná topologie lokálně konvexní?

`Návod:` *(1) Ukažte, že operace jsou spojité s využitím konvergence posloupností. (3) Ukažte, že pro každé $r > 0$ je konvexní obal množiny $\{f \in X; \rho(f, 0) < r\}$ celé X.*

Příklad 8. Nechť X je TVS a $A \subset X$ vyvážená množina s neprázdným vnitřkem.
(1) Ukažte, že $\operatorname{int} A$ je vyvážená, právě když $0 \in \operatorname{int} A$.
(2) Ukažte na protipříkladu, že $\operatorname{int} A$ nemusí být vyvážená.

Příklad 9. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS a $A \subset X$ neprázdná. Ukažte, že

$$\overline{A} = \bigcap\{A + U; U \in \mathcal{T}(0)\}.$$

Příklad 10. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS, který není Hausdorffův.
(1) Označme $Z = \overline{\{\boldsymbol{o}\}} = \bigcap \mathcal{T}(0)$. Ukažte, že Z je vektorový podprostor X.
(2) Nechť $Y = X/Z$ je kvocientový vektorový prostor a $q : X \to Y$ kanonické kvocientové zobrazení. Nechť $\mathcal{R}$ je kvocientová topologie na Y (tj. $\mathcal{R} = \{U \subset Y; q^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$). Ukažte, že $(Y, \mathcal{R})$ je HTVS.
(3) Ukažte, že $(Y, \mathcal{R})$ je lokálně konvexní, právě když $(X, \mathcal{T})$ je lokálně konvexní.

K oddílu I.2 – omezené množiny, spojitá lineární zobrazení

Příklad 11. Nechť X je TVS a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená, právě když každá spočetná podmnožina A je omezená.

Příklad 12. Nechť X je TVS a $A, B \subset X$ jsou omezené množiny. Ukažte, že i množiny $A \cup B$, $A + B$, $\overline{A}$, $\mathrm{b}(A)$ jsou omezené.

Příklad 13. Nechť X je LCS a $A \subset X$ je omezená množina. Ukažte, že i množiny $\operatorname{co} A$ a $\operatorname{aco} A$ jsou omezené.

Příklad 14. Nechť $X = L^p([0,1])$, kde $p \in (0,1)$. Ukažte, že $A = \{f \in X; \|f\|_p < 1\}$ je omezená množina, jejíž konvexní obal není omezená množina.

`Návod:` *Ukažte, že* $\operatorname{co} A = X$.

Příklad 15. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená jakožto podmnožina TVS X, právě když je omezená v metrice generované normou.

Příklad 16. Nechť X je TVS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ.

(1) Ukažte, že množina $A \subset X$, která je omezená v X, je omezená i v metrice ρ.
(2) Ukažte, že množina $A \subset X$, která je omezená v metrice ρ, nemusí být omezená v TVS X.

`Návod:` *(2) Metrika ρ sama může být omezená.*

Příklad 17. Uvažme prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}(\Omega)$ s topologií z Příkladu I.5(2) z přednášky. Nechť $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ je lineární funkcionál. Ukažte, že $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ (tj. Λ je distribuce), právě když Λ je spojitý.

Příklad 18. Uvažme prostor $(X, \mathcal{T})$ z Příkladu 4. Ukažte, že každý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{F}$ je spojitý.

Příklad 19. Nechť $X = \mathbb{F}^\Gamma$ a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená v X, právě když je „bodově omezená“, tj. právě když pro každé $\gamma \in \Gamma$ je množina $\{x(\gamma); x \in A\}$ omezená v $\mathbb{F}$.

Příklad 20. Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ s topologií bodové konvergence, $Y = \mathcal{C}([0,1])$ s topologií generovanou metrikou ρ z Příkladu 7 a $L : X \to Y$ je identita.

(1) Ukažte, že L zobrazuje omezené množiny na omezené množiny.
(2) Ukažte, že L je sekvenciálně spojité (tj., pokud $f_n \to f$ v X, pak $Lf_n \to Lf$ v Y).
(3) Ukažte, že L není spojité.

`Návod:` *(1) Nechť $A \subset X$ je omezená. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = \{x \in [0,1]; \forall f \in A : |f(x)| \le n\}$. Ukažte, že F_n jsou uzavřené podmnožiny $[0,1]$, jejichž sjednocení je celý interval $[0,1]$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolte $n \in \mathbb{N}$, aby $\lambda([0,1] \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $m > n$, aby $\frac{n}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ukažte, že pak $L(A) \subset m\{g \in Y; \rho(g,0) < \varepsilon\}$. Z toho odvoďte omezenost $L(A)$ v Y. (2) Použijte Lebesgueovu větu. (3) Nechť $U = \{f \in Y; \rho(f,0) < \frac{1}{2}\}$. Pak U je okolí nuly v Y. Ukažte, že $L^{-1}(U)$ není okolí nuly v X. (Pro každou konečnou $F \subset [0,1]$ najděte $f \in \mathcal{C}([0,1])$, pro kterou platí $f|_F = 0$ a přitom $f = 1$ na množině míry aspoň $\frac{1}{2}$.)*

Příklad 21. Nechť X je TVS a (x_n) je posloupnost prvků X. Ukažte, že posloupnost (x_n) je omezená v X, právě když pro každou posloupnost (λ_n) v $\mathbb{F}$ platí $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

Příklad 22. Nechť X je metrizovatelný TVS a (x_n) posloupnost prvků X. Ukažte, že existuje posloupnost kladných čísel (λ_n), pro kterou $\lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

`Návod:` *Nechť ρ je metrika generující topologii na X. Ukažte a pak použijte, že pro každé $x \in X$ platí $\lim\limits_{t \to 0+} \rho(\boldsymbol{o}, tx) = 0$.*

Příklad 23. Platí tvrzení z Příkladu 22 i pro nemetrizovatelné TVS?

`Návod:` *Uvažte prostor z Příkladu 4.*

Příklad 24. Nechť X je TVS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ. Nechť (x_n) je posloupnost prvků X, která konverguje k nule. Ukažte, že existuje posloupnost kladných čísel (λ_n) splňující $\lambda_n \to \infty$ a $\lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

`Návod:` *Z translační invariance metriky ρ plyne $\rho(\boldsymbol{o}, nx) \le n\rho(\boldsymbol{o}, x)$ pro $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.*

Příklad 25. Platí tvrzení z předchozího příkladu pro obecný TVS?

`Návod:` *Uvažte například $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro $p \in (1, \infty)$ se slabou topologií (viz oddíl II.1 z přednášky), (x_n) nechť je posloupnost kanonických jednotkových vektorů.*

K oddílu I.3 – prostory konečné a nekonečné dimenze

Příklad 26. Ukažte, že každý TVS konečné dimenze je lokálně konvexní.

`Návod:` *Pro Hausdorffův prostor použijte Tvrzení I.9 z přednášky. Pro obecný případ využijte Příklad 10.*

Příklad 27. Nechť X je vektorový prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existuje Hausdorffova lineární topologie, která není lokálně konvexní.

`Návod:` *Nechť $(e_j)_{j \in J}$ je algebraická báze X. Zvolme $p \in (0, 1)$ a definujme na X metriku $\rho(\sum a_j e_j, \sum b_j e_j) = \sum |a_j - b_j|^p$.*

Příklad 28. Nechť X je metrizovatelný TVS nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existuje nespojitý lineární funkcionál.

`Návod:` *Použijte algebraickou bázi X a Příklad 22.*

Příklad 29. Existuje na každém HTVS nekonečné dimenze nespojitý lineární funkcionál?

`Návod:` *Použijte Příklad 18.*

K oddílu I.4 – metrizovatelnost TVS

Příklad 30. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $p : X \to [0, \infty)$ je F-norma na X.

(1) Ukažte, že vzorec $\rho(x, y) = p(x - y)$ definuje translačně invariantní metriku na X, která generuje lineární topologii na X.
(2) Ukažte, že systém $\left\{\{x \in X; p(x) < \frac{1}{n}\}; n \in \mathbb{N}\right\}$ tvoří bázi okolí nuly v této topologii.

Příklad 31. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $q : X \to [0, \infty)$ je **kvazinorma** na X, tj. zobrazení s vlastnostmi:

- $\forall x \in X : q(x) = 0 \Leftrightarrow x = \boldsymbol{o}$;
- $\forall x \in X \, \forall \lambda \in \mathbb{F} : q(\lambda x) = |\lambda| \, q(x)$;
- $\exists C \ge 1 \, \forall x, y \in X : q(x + y) \le C(q(x) + q(y))$.

(1) Ukažte, že systém $\left\{\{x \in X; q(x) < r\}; r \in (0, \infty)\right\}$ tvoří bázi okolí nuly v jisté lineární topologii na X.
(2) Ukažte, že tato topologie je metrizovatelná.
(3) Ukažte, že v této topologii platí $x_n \to x$, právě když $q(x_n - x) \to 0$.

`Návod:` *(2) Ukažte, že existuje spočetná báze okolí nuly.*

Příklad 32. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $q : X \to [0, \infty)$ F-norma na X a $p \in (0, 1)$. Pak říkáme, že q je p**-norma**, pokud $q(\lambda x) = |\lambda|^p q(x)$ pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$.

(1) Ukažte, že funkce $f \mapsto \|f\|_p$ je p-norma na $L^p(\mu)$.
(2) Ukažte, že funkce $f \mapsto (\|f\|_p)^{1/p}$ je kvazinorma na $L^p(\mu)$.
(3) Nechť q je p-norma na X. Ukažte, že $q^{1/p}$ je kvazinorma na X a odhadněte příslušnou hodnotu C.

`Návod:` *(2) je speciální případ (3). Položme $\alpha = \frac{1}{p}$. Pomocí vyšetření průběhu vhodné funkce ukažte, že pro $a, b \geq 0$ je $a^\alpha + b^\alpha \leq (a + b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$.*

Příklad 33. Nechť X je TVS a p F-pseudonorma na X. Ukažte, že p je spojitá, právě když je spojitá v nule.

Příklad 34. Nechť X je TVS a U je okolí nuly. Ukažte, že existuje spojitá F-pseudonorma p na X, pro kterou $\{x \in X; p(x) < 1\} \subset U$.

`Návod:` *Nechť (V_n) je posloupnost vyvážených okolí nuly spňující $V_1 + V_1 \subset U$ a $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ pro $n \in N$. Aplikujte na tuto posloupnost postup konstrukce z důkazu Tvrzení I.14 z přednášky.*

Příklad 35. S využitím předchozího příkladu ukažte, že každý TVS je úplně regulární.

K oddílu I.5 – pseudonormy, Minkowského funkcionály, F-pseudonormy

Příklad 36. Ukažte na protipříkladu, že Minkowského funkcionál vyváženého okolí nuly nemusí být spojitý.

`Návod:` *Může se stát, že existuje $x \in X$ a čísla $0 < a < b$, že úsečka $\{tx; t \in [a, b]\}$ je obsažena v hranici daného vyváženého okolí nuly. Protipříklad lze zkonstruovat již v $\mathbb{R}^2$.*

Příklad 37. Nechť X je TVS, $A \subset X$ vyvážené okolí nuly a p_A jeho Minkowského funkcionál. Ukažte, že následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

(i) p_A je spojitý na X;
(ii) Pro každé $x \in \overline{A}$ platí $\{tx; t \in [0, 1)\} \subset \operatorname{int} A$;
(iii) $\operatorname{int} A = \{x \in X; p_A(x) < 1\}$ & $\overline{A} = \{x \in X; p_A(x) \leq 1\}$.

Příklad 38. Nechť X je TVS, $A \subset X$ podmnožina obsahující nulový vektor a $p \in (0, 1)$. Řekneme, že množina A je p-konvexní, jestliže

$$\forall x, y \in A \, \forall s, t \in [0, 1] : s^p + t^p = 1 \Rightarrow sx + ty \in A.$$

(1) Nechť A je p-konvexní, $x_1, \ldots, x_n \in A$ a $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ splňují $t_1^p + \cdots + t_n^p = 1$. Ukažte, že $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n \in A$.
(2) Nechť $0 < p < q < 1$. Ukažte, že platí

$$A \text{ konvexní} \Rightarrow A \ q\text{-konvexní} \Rightarrow A \ p\text{-konvexní}.$$

(3) Ukažte na příkladu, že p-konvexní množina nemusí být konvexní.
(4) Nechť A je p-konvexní okolí nuly. Ukažte, že jeho Minkowského funkcionál je spojitý.

`Návod:` *(1) Použijte matematickou indukci. (2) Využijte, že $0 \in A$. (3) Uvažte například množinu $\{f \in L^p([0, 1]); \|f\|_p < 1\}$. (4) Použijte charakterizaci z předchozího příkladu.*

Příklad 39. Ukažte, že topologie z Příkladu 4 je generována systémem všech pseudonorem na X.

Příklad 40. Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je nějaký systém F-pseudonorem na X.

(1) Ukažte, že systém
$$\Big\{\{x \in X; p_1(x) < c_1, \dots, p_k(x) < c_k\}; p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, c_1, \dots, c_k > 0\Big\}$$
tvoří bázi okolí nuly v nějaké lineární topologii na X.

(2) Ukažte, že F-pseudonormy z $\mathcal{P}$ jsou v této topologii spojité.

(3) Ukažte, že tato topologie je Hausdorffova, právě když pro každé $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$, pro kterou $p(x) > 0$.

Příklad 41. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS. Nechť $\mathcal{P}$ je systém všech spojitých F-pseudonorem na X. Ukažte, že topologie generovaná systémem $\mathcal{P}$ ve smyslu Příkladu 40 je právě $\mathcal{T}$.

`Návod:` *Použijte Příklad 34.*

Příklad 42. Nechť X je vektorový prostor. Ukažte, že na X existuje nejsilnější lineární topologie a že tato topologie je Hausdorffova.

`Návod:` *Použijte konstrukci z Příkladu 40 na systém všech F-pseudonorem na X.*

Příklad 43. Nechť X je vektorový prostor spočetné algebraické dimenze. Ukažte, že nejsilnější lineární topologie na X je lokálně konvexní.

`Návod:` *Nechť $\mathcal{T}$ je topologie z Příkladu 4. Ukažte, že každá F-pseudonorma na X je spojitá v $\mathcal{T}$: Nechť p je F-pseudonorma na X a (e_n) je algebraická báze. Pro každé $\varepsilon > 0$ ukažte, že existuje (t_n) posloupnost kladných čísel, pro kterou* $\operatorname{aco}\{t_n e_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \{x; p(x) < \varepsilon\}$.

Příklad 44. Nechť X je vektorový prostor nespočetné algebraické dimenze. Ukažte, že nejsilnější lineární topologie na X není lokálně konvexní.

`Návod:` *Ukažte, že F-seminorma definovaná jako v Příkladu 27 není spojitá v topologii z Příkladu 4.*

K oddílu I.6 - F-prostory, Fréchetovy prostory, totálně omezené množiny

Příklad 45. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor. Nechť $|||\cdot||| : X \to [0, +\infty]$ je zobrazení, které splňuje následující vlastnosti:

- $|||\boldsymbol{o}||| = 0$;
- $\forall x \in X \, \forall \alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\} : |||\alpha x||| = |\alpha| \cdot |||x|||$;
- $\forall x, y \in X : |||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$;
- $\forall x \in X : \|x\| \leq |||x|||$;
- funkce $|||\cdot|||$ je zdola polospojitá, tj. pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in X; |||x||| \leq c\}$ uzavřená.

Označme $Y = \{x \in X; |||x||| < +\infty\}$.

(1) Ukažte, že Y je vektorový podprostor X.

(2) Ukažte, že $||| \cdot |||$ je norma na Y a $(Y, ||| \cdot |||)$ je Banachův prostor.

`Návod:` *(2) Pro důkaz úplnosti postupujte takto: Je-li (x_n) $|||\cdot|||$-cauchyovská, je i $\|\cdot\|$-cauchyovská, a tedy konverguje v X k nějakému $x \in X$. Je třeba ukázat, že $x \in Y$ a $|||x_n - x||| \to 0$. K tomu využijte definici limity a polospojitost zdola, která znamená: $x_n \to x$ v X a $|||x_n||| \leq c$ pro každé $n \Rightarrow |||x||| \leq c$.*

Příklad 46. Dokažte úplnost prostorů $\ell^p(\Gamma)$ pro $1 \leq p < +\infty$ s použitím úplnosti prostoru $\ell^\infty(\Gamma)$ a Příkladu 45.

Příklad 47. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor. Nechť $(|||\cdot|||_k)$ je posloupnost funkcí na X, které splňují podmínky z Příkladu 45 a navíc

$$\forall x \in X\colon\ \|x\| \leq |||x|||_1 \leq |||x|||_2 \leq |||x|||_3 \leq \dots$$

Označme $Y = \{x \in X; \forall n \in \mathbb{N}\colon |||x||| < +\infty\}$.

(1) Ukažte, že Y je vektorový podprostor prostoru X.
(2) Ukažte, že Y je Fréchetův prostor, je-li opatřen lokálně konvexní topologií generovanou posloupností norem $(|||\cdot|||_n)$.

`Návod:` *(2) Použijte Tvrzení I.23 z přednášky a postup z Příkladu 45 na každou z norem* $|||\cdot|||_n$.

Příklad 48. Nechť X je TVS a $A, B \subset X$ jsou totálně omezené podmnožiny. Ukažte, že i množiny $A \cup B$, $A + B$, $\overline{A}$, $\mathrm{b}(A)$ jsou totálně omezené.

Příklad 49. Nechť X je TVS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ. Ukažte, že množina $A \subset X$ je totálně omezená v TVS X, právě když je totálně omezená v metrice ρ.

Příklad 50. Ukažte na protipříkladu, že v F-prostoru, který není lokálně konvexní, uzavřený konvexní obal kompaktní množiny nemusí být kompaktní.

`Návod:` *Protipříklad lze zkonstruovat například v prostoru* $L^p([0,1])$*, kde* $p \in (0,1)$*: Zvolme kladná čísla* ε*,* η *a* δ *tak, aby platilo:* $p < \frac{1}{1+\varepsilon}$*,* $\frac{\eta}{\varepsilon} < p$*,* $\delta < \varepsilon$ *a* $\frac{\eta}{\varepsilon - \delta} < p$*. Pro* $n \in \mathbb{N}$ *položme* $x_n = \frac{1}{n^{1+\eta}}$*,* $f_n = n^{1+\varepsilon}\chi_{(x_{n+1}, x_n)}$ *a* $t_n = \frac{1}{n^{1+\delta}}$*. Ukažte, že* $f_n \to 0$ *v* $L^p([0,1])$*, a tedy* $\{0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$ *je kompaktní množina. Dále ukažte, s využitím prvků* $\frac{t_1 f_1 + \dots + t_n f_n}{t_1 + \dots + t_n}$*, že konvexní obal uvedené kompaktní množiny je množina neomezená v* $L^p([0,1])$*.*

K oddílu I.7 – oddělovací věty

Příklad 51. Nechť $X = L^p([0,1])$, kde $p \in (0,1)$. Ukažte, že $X^* = \{0\}$.

`Návod:` *Ukažte, že jediné dvě konvexní otevřené množiny v* X *jsou* $\emptyset$ *a* X*.*

Příklad 52. Nechť $X = \ell^p$, kde $p \in (0,1)$. Ukažte, že pro každou posloupnost $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell^\infty$ vzorec

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell^p,$$

definuje spojitý lineární fukcionál na ℓ^p. Ukažte, že zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi_{\boldsymbol{x}}$ je lineární bijekce ℓ^∞ na X^*.

Příklad 53. Nechť $p \in (0,1)$. Ukažte, že ℓ^p je izomorfní (dokonce izometrické) podprostoru $L^p([0,1])$. S využitím předchozích dvou příkladů pak ukažte na protipříkladu, že spojitý lineární funkcionál na podprostoru TVS nemusí jít rozšířit na spojitý lineární funkcionál na celém prostoru.

Příklad 54. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že v X existují dvě disjunktní konvexní množiny, které jsou husté v X (a tedy je nelze oddělit nenulovým prvkem X^*).

`Návod:` *Využijte existenci nespojitého lineárního funkcionálu.*

Příklad 55. Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ s L^2-normou (tj. $\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$). Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme $Y_\alpha = \{f \in X; f(0) = \alpha\}$. Ukažte, že $(Y_\alpha; \alpha \in \mathbb{R})$ je systém po dvou disjunktních hustých konvexních množin. Ukažte, že pro $\alpha \neq \beta$ nelze množiny Y_α a Y_β oddělit nenulovým prvkem X^*.

Příklad 56. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$ (uvažujme prostory nad $\mathbb{R}$). Nechť $\boldsymbol{x} = (x_n) \in X$ je prvek, jehož všechny souřadnice jsou kladné, a $\boldsymbol{y} = (\frac{x_n}{n}) \in X$. Položme

$$A = \{\boldsymbol{z} = (z_n) \in X; \forall n \in \mathbb{N} : z_n \geq 0\}, \qquad B = \{-\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Ukažte, že A a B jsou disjunktní uzavřené konvexní podmnožiny X, které není možné oddělit nenulovým prvkem X^*.

`Návod:` *Postupujte sporem: Nechť $f \in X^* \setminus \{0\}$ splňuje $\sup f(B) \leq \inf f(A)$. Ukažte, že nutně $f \geq 0$ na A a $\inf f(A) = 0$. Funkcionál f lze reprezentovat příslušnou posloupností (prvkem ℓ^1 resp. ℓ^q, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), ukažte, že všechny prvky této posloupnosti musí být nezáporné. Z předpokladu $\inf f(B) \leq 0$ odvoďte $f(\boldsymbol{y}) = 0$, a odtud $f = 0$, což dává spor.*