

## III.2 Integrovatelnost vektorových funkcí

### Definice.

- Nechť  $f : \Omega \rightarrow X$  je jednoduchá měřitelná funkce tvaru  $f = \sum_{j=1}^k x_j \chi_{E_j}$  (kde  $E_1, \dots, E_k \in \Sigma$  jsou po dvou disjunktní a  $x_1, \dots, x_k \in X$ ). Nechť  $E \in \Sigma$ . Říkáme, že  $f$  je **integrovatelná přes množinu  $E$** , pokud pro každé  $j \in \{1, \dots, k\}$  platí  $\mu(E \cap E_j) < \infty$  nebo  $x_j = \mathbf{o}$ . **Integrálem funkce  $f$  přes množinu  $E$**  pak rozumíme prvek  $X$  definovaný vzorcem

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{j=1}^k \mu(E_j \cap E) x_j,$$

kde používáme konvenci  $\infty \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ . Pokud  $f$  je integrovatelná přes  $\Omega$ , říkáme, že je **integrovatelná**.

- Nechť  $f : \Omega \rightarrow X$  je silně  $\mu$ -měřitelná. Řekneme, že  $f$  je **bochnerovsky integrovatelná**, existuje-li posloupnost  $(f_n)$  jednoduchých integrovatelných funkcí, pro kterou platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \, d\mu(\omega) = 0,$$

kde integrál v tomto vzorci je Lebesgueův. **Bochnerovým integrálem funkce  $f$**  pak nazýváme prvek  $X$  definovaný vzorcem

$$(B) \int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

- Funkce  $f : \Omega \rightarrow X$  se nazývá **slabě integrovatelná**, pokud pro každé  $\varphi \in X^*$  je  $\varphi \circ f$  integrovatelná (i.e.,  $\varphi \circ f \in L^1(\mu)$ ).

### Tvrzení 7 (základní vlastnosti Bochnerova integrálu).

- Integrovatelné jednoduché funkce tvoří vektorový prostor a zobrazení, které jednoduché integrovatelné funkci  $f$  přiřadí její integrál  $\int_{\Omega} f \, d\mu$ , je lineární.*
- Nechť  $f$  je jednoduchá měřitelná funkce. Pak  $f$  je integrovatelná, právě když funkce  $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$  je integrovatelná. Pak platí*

$$\left\| \int_{\Omega} f \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(\omega)\| \, d\mu(\omega).$$

- Limita definující Bochnerův integrál existuje a nezávisí na volbě posloupnosti  $(f_n)$ .*
- Bochnerovsky integrovatelné funkce tvoří vektorový prostor a zobrazení, které bochnerovsky integrovatelné funkci přiřadí její Bochnerův integrál, je lineární.*
- Je-li  $f : \Omega \rightarrow X$  bochnerovsky integrovatelná, pak funkce  $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$  je integrovatelná a platí*

$$\left\| (B) \int_{\Omega} f \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(\omega)\| \, d\mu(\omega).$$

- Je-li  $f : \Omega \rightarrow X$  bochnerovsky integrovatelná, pak pro každou  $E \in \Sigma$  je  $i \chi_E \cdot f$  bochnerovsky integrovatelná. (Hodnotu  $(B) \int_{\Omega} \chi_E \cdot f \, d\mu$  pak nazýváme **Bochnerovým integrálem funkce  $f$  přes množinu  $E$**  a značíme  $(B) \int_E f \, d\mu$ .)*

**Věta 8** (charakterizace bochnerovské integrovatelnosti). *Nechť  $f : \Omega \rightarrow X$  je silně  $\mu$ -měřitelná funkce. Pak  $f$  je bochnerovsky integrovatelná, právě když  $\int_{\Omega} \|f(\omega)\| \, d\mu(\omega) < \infty$ .*

**Věta 9** (Lebesgueova věta pro Bochnerův integrál). *Nechť  $(f_n)$  je posloupnost bochnerovsky integrovatelných funkcí  $f_n : \Omega \rightarrow X$ , která skoro všude konverguje k funkci  $f : \Omega \rightarrow X$ . Nechť  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je integrovatelná funkce a pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $\|f_n(\omega)\| \leq g(\omega)$  pro skoro všechna  $\omega \in \Omega$ . Pak  $f$  je bochnerovsky integrovatelná a platí  $(B) \int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_{\Omega} f_n \, d\mu$ .*

**Tvrzení 10** (absolutní spojitost Bochnerova integrálu). *Nechť  $f : \Omega \rightarrow X$  je bochnerovsky integrovatelná. Pak platí:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \Sigma : \mu(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f \, d\mu \right\| < \varepsilon.$$

**Tvrzení 11** (slabý integrál). *Nechť  $f : \Omega \rightarrow X$  je slabě integrovatelná. Pak zobrazení*

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi \circ f \, d\mu, \quad \varphi \in X^*,$$

*je spojitý lineární funkcionál na  $X^*$ , tj.  $F \in X^{**}$ .*

**Definice, značení a poznámky:**

- (1) Prvek  $F \in X^{**}$  z Tvrzení 11 se nazývá **slabý integrál** (nebo též **Dunfordův integrál**) funkce  $f$ , značíme ho  $(D) \int_{\Omega} f \, d\mu$ .
- (2) Nechť  $f : \Omega \rightarrow X$  je slabě integrovatelná. Pak pro každou  $E \in \Sigma$  je  $\chi_E \cdot f$  slabě integrovatelná. Příslušný slabý integrál značíme  $(D) \int_E f \, d\mu$ .
- (3) Řekneme, že  $f : \Omega \rightarrow X$  je **pettsovsky integrovatelná**, pokud
  - $f$  je slabě integrovatelná, a navíc
  - pro každou  $E \in \Sigma$  slabý integrál  $(D) \int_E f \, d\mu$  patří do  $\varkappa(X)$ , kde  $\varkappa : X \rightarrow X^{**}$  je kanonické vnoření.

**Pettisův integrál funkce  $f$  přes  $E$**  je pak příslušný prvek  $X$  a značí se  $(P) \int_E f \, d\mu$ . Tj. pro  $x \in X$  pak platí

$$x = (P) \int_E f \, d\mu \Leftrightarrow \forall \varphi \in X^* : \varphi(x) = \int_E \varphi \circ f \, d\mu.$$

**Poznámky:**

- (1) K tomu, aby  $f$  byla pettsovsky integrovatelná, je nutné, aby  $(D) \int_E f \, d\mu \in \varkappa(X)$  pro každé  $E \in \Sigma$ . Nestačí, aby to bylo splněno pro  $E = \Omega$ .
- (2) Slabě integrovatelná funkce nemusí být pettsovsky integrovatelná.
- (3) Pettsovsky integrovatelná funkce nemusí být silně  $\mu$ -měřitelná. Například funkce z Příkladu 6(1) je pettsovsky integrovatelná, její integrál je nulový, ale není esenciálně separabilně hodnotová.
- (4) Každá bochnerovsky integrovatelná funkce je pettsovsky integrovatelná (to plyne z Tvrzení 12 níže), obrácená implikace neplatí ani pro silně  $\mu$ -měřitelné funkce (viz Příklad 13 níže).

**Tvrzení 12** (Bochnerův integrál a omezený operátor). *Nechť  $f : \Omega \rightarrow X$  je bochnerovsky integrovatelná,  $Y$  je Banachův prostor a  $L : X \rightarrow Y$  spojitý lineární operátor. Pak  $L \circ f$  je bochnerovsky integrovatelná a navíc*

$$(B) \int_{\Omega} L \circ f \, d\mu = L \left( (B) \int_{\Omega} f \, d\mu \right).$$

**Poznámka:** Předchozí tvrzení jednak ukazuje, že bochnerovská integrovatelnost implikuje pettsovskou, a také lze využít k výpočtu Bochnerova integrálu: K tomu je třeba ukázat, že Bochnerův integrál existuje, jeho hodnotu lze pak počítat s využitím vhodných funkcionálů či operátorů.

**Příklad 13.** *Nechť  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\Sigma$  je  $\sigma$ -algebra všech podmnožin  $\mathbb{N}$ ,  $\mu$  je sčítací míra a  $f : \Omega \rightarrow X$ . Pak platí:*

- (a)  $f$  je bochnerovsky integrovatelná, právě když řada  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  je absolutně konvergentní. Bochnerův integrál je pak roven součtu řady.
- (b) Je-li řada  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  bezpodmínečně konvergentní, je  $f$  pettsovsky integrovatelná a její Pettisův integrál je roven součtu řady.

**Poznámka:** V bodě (b) Příkladu 13 platí i obrácená implikace – je-li  $f$  pettsovsky integrovatelná, je řada  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  bezpodmínečně konvergentní. Důkaz je však obtížnější, tvrzení je obsahem Orlicz-Pettisovy věty.