

I.4 Metrizovatelnost topologických vektorových prostorů

Věta 12 (charakterizace metrizovatelných TVS). *Nechť (X, \mathcal{T}) je HTVS. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

- (i) X je metrizovatelný (tj., topologie \mathcal{T} je generovaná nějakou metrikou na X).
- (ii) Existuje translačně invariantní metrika na X , která generuje topologii \mathcal{T} .
- (iii) Existuje spočetná báze okolí \mathbf{o} v (X, \mathcal{T}) .

Tvrzení 13. *Nechť (X, \mathcal{T}) je HTVS, který má spočetnou bázi okolí \mathbf{o} . Pak existuje funkce $p : X \rightarrow [0, \infty)$ s vlastnostmi:*

- (a) $p(\mathbf{o}) = 0$;
- (b) $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\} : p(x) > 0$;
- (c) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| \leq 1 : p(\lambda x) \leq p(x)$;
- (d) $\forall x, y \in X : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
- (e) $\forall x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} p(tx) = 0$;
- (f) $\left\{ \{x \in X; p(x) < r\}; r > 0 \right\}$ tvoří bázi okolí \mathbf{o} v X .

Pak vzorec $\rho(x, y) = p(x - y)$, $x, y \in X$, definuje translačně invariantní metriku na X , která generuje topologii \mathcal{T} .

Poznámka. Je-li X vektorový prostor, pak funkce $p : X \rightarrow [0, \infty)$ s vlastnostmi (a)–(e) z předchozího tvrzení se nazývá **F-norma** na X . Pokud p splňuje vlastnosti (a),(c)–(e), nazývá se **F-pseudonorma**.

Důsledek 14. *HTVS, který má omezené okolí nuly, je metrizovatelný.*

I.5 Minkowského funkcionály, pseudonormy a generování lokálně konvexních topologií

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující množina. **Minkowského funkcionálem** množiny A rozumíme funkci definovanou vzorcem

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda A\}, \quad x \in X.$$

Tvrzení 15 (základní vlastnosti Minkowského funkcionálu). *Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující množina.*

- Pro $x \in X$ a $t > 0$ platí $p_A(tx) = tp_A(x)$.
- Je-li A konvexní, je p_A sublineární funkcionál.
- Je-li A absolutně konvexní, je p_A pseudonorma.

Lemma 16. *Nechť X je TVS a $A \subset X$ je konvexní množina. Pokud $x \in \overline{A}$ a $y \in \text{Int } A$, pak $\{tx + (1 - t)y; t \in [0, 1)\} \subset \text{Int } A$.*

Tvrzení 17 (o Minkowského funkcionálu konvexního okolí nuly). *Nechť X je TVS a $A \subset X$ je konvexní okolí \mathbf{o} . Pak platí:*

- p_A je spojitá na X .
- $\text{Int } A = \{x \in X; p_A(x) < 1\}$.
- $\overline{A} = \{x \in X; p_A(x) \leq 1\}$.
- $p_A = p_{\overline{A}} = p_{\text{Int } A}$.

Důsledek 18. *Každý LCS je úplně regulární. Každý HLCS je Tichonovův.*

Poznámka: Lze ukázat, že dokonce každý TVS je úplně regulární, a tedy každý HTVS je Tichonovův. Důkaz tohoto obecnějšího případu je obtížnější, lze využít obecnější verzi Tvrzení 13 z oddílu V.4. Důkaz, že každý TVS je regulární, je snadný, plyne z Větičky 3(ii).

Věta 19 (o topologii generované systémem pseudonorem). *Nechť X je vektorový prostor a \mathcal{P} neprázdný systém pseudonorem na X . Pak existuje právě jedna topologie \mathcal{T} na X , pro kterou (X, \mathcal{T}) je TVS a systém*

$$\left\{ \{x \in X; p_1(x) < c_1, \dots, p_k(x) < c_k\}; p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, c_1, \dots, c_k > 0 \right\}$$

je báze okolí \mathbf{o} v (X, \mathcal{T}) . Topologie \mathcal{T} je navíc lokálně konvexní. Topologie \mathcal{T} je Hausdorffova, právě když pro každé $x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$, pro které $p(x) > 0$.

Definice. Topologie \mathcal{T} z Věty 19 se nazývá **topologie generovaná systémem pseudonorem** \mathcal{P} .

Věta 20 (o generování lokálně konvexních topologií). *Nechť (X, \mathcal{T}) je LCS. Nechť $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ je systém všech spojitých pseudonorem na prostoru (X, \mathcal{T}) . Pak topologie generovaná systémem $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ je rovna \mathcal{T} .*

Tvrzení 21. *Nechť X je vektorový prostor.*

- (1) *Je-li p pseudonorma na X , pak množina $A = \{x \in X; p(x) < 1\}$ je absolutně konvexní, pohlcující a platí $p = p_A$.*
- (2) *Nechť p, q jsou dvě pseudonormy na X . Pak $p \leq q$, právě když $\{x \in X; p(x) < 1\} \supset \{x \in X; q(x) < 1\}$.*
- (3) *Nechť \mathcal{P} je neprázdný systém pseudonorem na X a \mathcal{T} je topologie generovaná systémem \mathcal{P} . Nechť p je pseudonorma na X . Pak p je \mathcal{T} -spojitá, právě když existují $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ a $c > 0$, pro která platí $p \leq c \cdot \max\{p_1, \dots, p_k\}$.*

Věta 22 (o metrízovatelnosti LCS). *Nechť (X, \mathcal{T}) je HLCS. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

- (i) *X je metrízovatelný (tj., topologie \mathcal{T} je generovaná nějakou metrikou na X).*
- (ii) *Existuje translačně invariantní metrika na X , která generuje topologii \mathcal{T} .*
- (iii) *Existuje spočetná báze okolí \mathbf{o} v (X, \mathcal{T}) .*
- (iv) *Topologie \mathcal{T} je generovaná spočetným systémem pseudonorem.*

Tvrzení 23. (1) *Nechť (X, \mathcal{T}) je metrízovatelný LCS. Pak je topologie \mathcal{T} generovaná posloupností pseudonorem (p_n) splňující*

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots$$

- (2) *Nechť X je vektorový prostor a (p_n) je posloupnost pseudonorem na X , která splňuje podmínky:*
 - $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots$;
 - $\forall x \in X \setminus \{\mathbf{o}\} \exists n: p_n(x) > 0$.

Pak

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x - y)\}, \quad x, y \in X$$

je translačně invariantní metrika na X , která generuje lokálně konvexní topologii na X generovanou posloupností pseudonorem (p_n) . Navíc pro každou posloupnost (x_k) v X platí

- (a) $\rho(x_k, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: p_n(x_k - x) \xrightarrow{k} 0$;
- (b) *Posloupnost (x_k) je cauchyovská v metrice ρ , právě když je cauchyovská v každé z pseudonorem p_n .*

Věta 24 (charakterizace normovatelných TVS). *Nechť (X, \mathcal{T}) je HTVS. Pak X je normovatelný (tj. \mathcal{T} je generovaná normou), právě když v X existuje omezené konvexní okolí \mathbf{o} .*

Tvrzení 25. *Nechť X je LCS.*

- (a) *Množina $A \subset X$ je omezená, právě když každá spojitá pseudonorma p na X je omezená na A . (Podmínku stačí testovat pro nějaký systém pseudonorem generující topologii X .)*
- (b) *Nechť Y je LCS a $L: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak L je spojitý, právě když*

$$\forall q \text{ spojitou pseudonormu na } Y \exists p \text{ spojitá pseudonorma na } X \forall x \in X: q(L(x)) \leq p(x).$$

Pokud \mathcal{P} je systém pseudonorem generující topologii prostoru X a \mathcal{Q} je systém pseudonorem generující topologii prostoru Y , pak je spojitost L ekvivalentní podmínce

$$\forall q \in \mathcal{Q} \exists p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P} \exists c > 0 \forall x \in X: q(L(x)) \leq c \cdot \max\{p_1(x), \dots, p_k(x)\}.$$

- (c) *Net (x_τ) konverguje k bodu $x \in X$, právě když pro každou spojitou pseudonormu p na X platí $p(x_\tau - x) \rightarrow 0$. (Podmínku stačí testovat pro nějaký systém pseudonorem generující topologii X .)*