I.2 Spojitá a omezená lineární zobrazení

Tvrzení 6. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ a $(Y,\mathcal{U})$ jsou TVS nad $\mathbb{F}$ a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *L je spojité.*
(ii) *L je spojité v bodě $\boldsymbol{o}$.*
(iii) *L je* **stejnoměrně spojité**, *tj.*

$$\forall U \in \mathcal{U}(\boldsymbol{o})\, \exists V \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})\, \forall x, y \in X : x - y \in V \Rightarrow L(x) - L(y) \in U.$$

Tvrzení 7. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je TVS nad $\mathbb{F}$ a $L : X \to \mathbb{F}$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *L je spojité.*
(ii) $\ker L$ *je uzavřený podprostor X.*
(iii) *Existuje $U \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ takové, že $L(U)$ je omezená množina v $\mathbb{F}$.*

Je-li L nespojité, je $\ker L$ *hustý podprostor X.*

Definice. Nechť $(X,\mathcal{T})$ je TVS a $A \subset X$. Množina A je **omezená** v $(X,\mathcal{T})$, pokud pro každé $U \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ existuje $\lambda > 0$, pro které $A \subset \lambda U$.

Tvrzení 8. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ a $(Y,\mathcal{U})$ jsou TVS nad $\mathbb{F}$ a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažme následující podmínky:*

(i) *L je spojité.*
(ii) *Pro každou $A \subset X$ omezenou je $L(A)$ omezená v Y (tj. L je* **omezené***).*

Pak platí (i)$\Rightarrow$(ii). Je-li topologie $\mathcal{T}$ generována nějakou translačně invariantní metrikou na X, pak (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Poznámka. Z Věty 12 v oddílu I.4 plyne, že je-li TVS $(X,\mathcal{T})$ metrizovatelný, tj. topologie $\mathcal{T}$ je generována nějakou metrikou, pak tuto metriku lze zvolit translačně invariantní.

Definice. Nechť $(X,\mathcal{T})$ a $(Y,\mathcal{U})$ jsou TVS nad $\mathbb{F}$ a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení. Říkáme, že L je

- **izomorfismus** X **do** Y, je-li L spojité, prosté a L^{-1} je spojité na $L(X)$;
- **izomorfismus** X **na** Y, je-li L spojité, prosté a na a L^{-1} je spojité na Y.

Prostory X a Y jsou **izomorfní**, existuje-li izomorfismus X na Y.

I.3 Prostory konečné a nekonečné dimenze

Tvrzení 9. *Nechť X je HTVS konečné dimenze.*

(a) *Je-li Y libovolný TVS a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení, pak L je spojité.*
(b) *Prostor X je izomorfní $\mathbb{F}^n$, kde $n = \dim X$.*

Důsledek 10. *Nechť X je HTVS. Pak každý jeho podprostor konečné dimenze je uzavřený.*

Definice. Nechť $(X,\mathcal{T})$ je TVS a $A \subset X$. Množina A se nazývá **totálně omezená** (nebo též **prekompaktní**), jestliže pro každé $U \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ existuje $F \subset X$ konečná, pro kterou $A \subset F + U$.

Poznámka: Každá kompaktní množina v TVS je totálně omezená. Každá totálně omezená množina je omezená.

Věta 11. *Nechť X je HTVS. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.
(ii) *Existuje kompaktní okolí nuly v X.*
(iii) *Existuje totálně omezené okolí nuly v X.*