III.3 Lebesgue-Bochnerovy prostory

Definice. Nechť $f : \Omega \to X$ je silně μ-měřitelná.

- Nechť $p \in [1, \infty)$. Řekneme, že funkce f patří do $L^p(\mu; X)$ (podrobněji do $L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$), pokud funkce $\omega \mapsto \|f(\omega)\|^p$ je integrovatelná. Pro takovou funkci položíme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

- Řekneme, že f patří do $L^\infty(\mu; X)$ (podrobněji do $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu; X)$), pokud funkce $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$ je esenciálně omezená. Pro takovou funkci položíme

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|.$$

Poznámky:

(1) Je-li $p \in [1, \infty)$, pak jednoduché integrovatelné funkce patří do $L^p(\mu; X)$. Pokud $f = \sum_{j=1}^k x_j \chi_{E_j}$, kde $E_1, \dots, E_k \in \Sigma$ jsou po dvou disjunktní a $x_1, \dots, x_k \in X$, pak

$$\|f\|_p = \left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p \, \mu(E_j) \right)^{1/p}.$$

(2) Jednoduché měřitelné funkce patří do $L^\infty(\mu; X)$. Je-li f tvaru jako v předchozím bodě, pak

$$\|f\|_\infty = \max\{\|x_j\| \,; j \in \{1, \dots, k\} \;\&\; \mu(E_j) > 0\}.$$

(3) Je-li $p \in [1, \infty]$, $h \in L^p(\mu)$ a $x \in X$, pak funkce $f : \Omega \to X$ definovaná vzorcem $f(\omega) = h(\omega) \cdot x$ patří do $L^p(\mu; X)$ a platí $\|f\|_p = \|h\|_p \cdot \|x\|$. Značíme $f = h \cdot x$.

Věta 14.

(a) *Nechť $p \in [1, \infty]$. Po ztotožnění funkcí, které se rovnají skoro všude, je prostor $(L^p(\mu; X), \|\cdot\|_p)$ Banachův prostor.*

(b) *Prostor $L^1(\mu; X)$ je tvořen právě bochnerovsky integrovatelnými funkcemi (přesněji příslušnými třídami ekvivalence).*

(c) *Je-li X Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, je i $L^2(\mu; X)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem definovaným vzorcem*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f, g \in L^2(\mu; X).$$

(d) *Je-li míra μ konečná, pak pro každé $1 \le p < q \le \infty$ platí*

$$L^\infty(\mu; X) \subset L^q(\mu; X) \subset L^p(\mu; X) \subset L^1(\mu; X).$$

Věta 15. *Nechť $p \in [1, \infty)$.*

(a) *Jednoduché integrovatelné funkce tvoří hustý podprostor $L^p(\mu; X)$.*

(b) *Pokud jsou prostory $L^p(\mu)$ a X separabilní, pak i prostor $L^p(\mu; X)$ je separabilní.*

Příklady 16.

(1) *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná množina kladné míry a $p \in [1, \infty]$. Pak symbolem $L^p(G; X)$ značíme prostor $L^p(\mu; X)$, kde μ je zúžení Lebesgueovy n-rozměrné míry na G. Je-li $p \in [1, \infty)$ a X je separabilní, pak $L^p(G; X)$ je separabilní.*

(2) *Nechť μ je sčítací míra na $\mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$. Pak prostor $L^p(\mu; X)$ se značí $\ell^p(X)$ a lze ho vyjádřit jako*

$$\ell^p(X) = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\} \text{ pro } p \in [1, \infty),$$
$$\ell^\infty(X) = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}; \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\}.$$

Příslušná norma je pak definovaná vzorcem

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p}, \quad (x_n) \in \ell^p(X), p \in [1, \infty),$$
$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|, \quad (x_n) \in \ell^\infty(X).$$

Je-li X separabilní a $p \in [1, \infty)$, je i $\ell^p(X)$ separabilní.

Poznámky o reprezentaci duálních prostorů: Nechť $p \in [1, \infty)$ a $p^* \in (1, \infty]$ je duální exponent. Pak platí:

(1) Duál k prostoru $\ell^p(X)$ je kanonicky izometrický prostoru $\ell^{p^*}(X^*)$. Přesněji, pokud posloupnost (φ_n) patří do $\ell^{p^*}(X^*)$, pak předpis

$$(x_n) \mapsto \sum_n \varphi_n(x_n), \qquad (x_n) \in \ell^p(X)$$

definuje spojitý lineární funkcionál, jehož norma je rovna $\|(\varphi_n)\|_{\ell^{p^*}(X^*)}$. Navíc každý spojitý lineární funkcionál je takovéhoto tvaru.

(2) Je-li X reflexivní a μ σ-konečná, pak duál k prostoru $L^p(\mu; X)$ je kanonicky izometrický prostoru $L^{p^*}(\mu; X^*)$. Přesněji, pokud $g \in L^{p^*}(\mu; X)$, pak předpis

$$f \mapsto \int g(\omega)(f(\omega))\, \mathrm{d}\mu, \quad f \in L^p(\mu; X)$$

definuje spojitý lineární funkcionál, jehož norma je rovna $\|g\|_{L^{p^*}(\mu; X^*)}$. Navíc každý spojitý lineární funkcionál je takovéhoto tvaru.

(3) Důkaz bodu (1) není těžký, je analogický důkazu reprezentace duálu k ℓ^p. Důkaz bodu (2) je obtížnější, mj. je v něm potřeba využít netriviální speciální vlastnosti X. Bod (2) platí i pro obecnější X, ale ne pro každé X. Přesná podmínka pro platnost bodu (2) pro libovolnou σ-konečnou míru je následující:

$$\forall Y \subset\subset X \text{ separabilní: } Y^* \text{ je separabilní.}$$

Tato podmínka je ekvivalentní tomu, že X^* má **Radon-Nikodýmovu vlastnost**, tj. platnosti následující verze Radon-Nikodýmovy věty:

$$\forall m : \Sigma \to X^* \; \sigma\text{-aditivní}, m \ll \mu \Rightarrow \exists f \in L^1(\mu, X^*) \forall A \in \Sigma \colon m(A) = (B) \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

(4) Pokud X je reflexivní a $p \in (1, \infty)$, je i $L^p(\mu; X)$ reflexivní.