FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY KE CVIČENÍ A K SAMOSTATNÉMU PŘEMÝŠLENÍ – ZS 2018/2019

BANACHOVY ALGEBRY

1. Příklady Banachových algeber, invertibilní prvky

Příklad 1. Nechť $A = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, kde $p \in [1, \infty]$ a $n \geq 2$. Uvažujme na A násobení po souřadnicích, tj.,

$$(x_1, x_2 \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2 \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_2 y_n).$$

(1) Ukažte, že A je Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.
(2) Ukažte, že jednotka má normu 1, právě když $p = \infty$.
(3) Aplikujte na A příslušné přenormování a ukažte, že nová norma je $\|\cdot\|_\infty$.

Příklad 2. Nechť M_n je algebra komplexních $n \times n$-matic opatřená maticovým násobení. Připomeňme, že každá $n \times n$-matice reprezentuje lineární zobrazení $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ a že maticové násobení odpovídá skládání lineárních zobrazení.

(1) Nechť $p \in [1, \infty]$ a uvažujme na M_n operátorovou normu z $L((\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p))$. Ukažte, že M_n pak je Banachova algebra s jednotkou a že jednotka má normu 1.
(2) Ukažte, že pro $p_1 \neq p_2$ jsou normy z (1) ekvivalentní a různé, pokud $n \geq 2$.
(3) Ukažte, že M_n je komutativní, právě když $n = 1$.

Příklad 3. Nechť M_n je algebra komplexních $n \times n$-matic opatřená maticovým násobení. Uvažujme na M_n normu

$$\|(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Ukažte, že M_n opatřená touto normou je Banachova algebra s jednotkou a její jednotka má normu větší než 1 (pro $n \geq 2$).

Příklad 4. Nechť $A = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, kde $n \geq 2$ a $p \in [1, \infty]$.

(1) Definujme násobení na A předpisem

$$(x_1, x_2 \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2 \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_1 y_2, \dots, x_1 y_n).$$

Ukažte, že A opatřená tímto násobením je Banachova algebra a že A má mnoho levých jednotek, ale žádnou pravou jednotku.

(2) Definujme násobení na A by

$$(x_1, x_2 \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2 \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_1, \dots, x_2 y_1).$$

Ukažte, že A opatřená tímto násobením je Banachova algebra a že A má mnoho pravých jednotek, ale žádnou levou jednotku.

(3) Reprezentujte algebry z bodů (1) a (2) jako podalgebry maticové algebry M_n.

`Návod:` *(3) Uvažte matice s jedním nenulovým řádkem nebo sloupcem.*

Příklad 5. Nechť $A = \ell^p(\Gamma)$, kde $p \in [1, \infty]$ a Γ je nekonečná množina. Uvažujme na A bodové násobení.

(1) Ukažte, že A je Banachova algebra.
(2) Ukažte, že A má jednotku, právě když $p = \infty$.

Příklad 6. Nechť X je libovolný netriviální Banachův prostor. Definujme na X triviální násobení, tj., $x \cdot y = \boldsymbol{o}$ pro $x, y \in X$.

(1) Ukažte, že X je Banachova algebra bez jednotky.
(2) Popište algebru X^+ (s přidanou jednotkou).
(3) Reprezentujte algebry X a X^+ jako podalgebry $L(X^+) = L(X \oplus_1 \mathbb{C})$.
(4) Najděte podalgebru maticové algebry M_n (kde $n \geq 2$) izomorfní takové triviální algebře.

`Návod:` *(4) Použijte popis z (3) pro $X = \mathbb{C}^{n-1}$.*

Příklad 7. Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou Banachovy algebry a nechť $p \in [1, \infty]$. Uvažme vektorový prostor $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, kde norma a násobení jsou dány vzorci

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = \|(\|a_1\|, \dots, \|a_n\|)\|_p,$$
$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

(1) Ukažte, že A je Banachova algebra.
(2) Ukažte, že A má jednotku, právě když každá z algeber $A_1, \dots, A_n$ má jednotku. (Příslušnou jednotku najděte.)
(3) Ukažte, že A je komutativní, právě když každá z algeber $A_1, \dots, A_n$ je komutativní.

Příklad 8. Nechť T je Hausdorffův lokálně kompaktní prostor. Uvažme Banachův prostor $\mathcal{C}_0(T)$ (s maximovou normou) a definujme na něm bodové násobení.

(1) Ukažte, že $\mathcal{C}_0(T)$ je komutativní Banachova algebra.
(2) Ukažte, že algebra $\mathcal{C}_0(T)$ má jednotku, právě když T je kompaktní.
(3) Nechť T není kompaktní. Nechť $B = \operatorname{span}(\mathcal{C}_0(T) \cup \{1\})$ jakožto podalgebra $\ell^\infty(T)$. Ukažte, že B je (algebraicky) izomorfní $(\mathcal{C}_0(T))^+$, ale nikoli izometrická.

Příklad 9. Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor a nechť A je Banachova algebra. Nechť $\mathcal{C}(K, A)$ je vektorový prostor všech spojitých zobrazení $f : K \to A$. Uvažujme na $\mathcal{C}(K, A)$ normu a násobení dané vzorci

$$\|f\| = \sup\{\|f(t)\|\,; t \in K\}, \qquad f \in \mathcal{C}(K, A),$$
$$(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t), \quad t \in K, \quad f, g \in \mathcal{C}(K, A).$$

(1) Ukažte, že $\mathcal{C}(K, A)$ je Banachova algebra.
(2) Ukažte, že $\mathcal{C}(K, A)$ má jednotku, právě když A má jednotku, a najděte ji.
(3) Ukažte, že $\mathcal{C}(K, A)$ je komutativní, právě když A je komutativní.

Příklad 10. Nechť X je Banachův prostor. Uvažme prostor $L(X)$ všech spojitých lineárních funkcionálů na X s operátorovou normou. Definujme na $L(X)$ násobení jako skládání operátorů.

(1) Ukažte, že $L(X)$ je Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.
(2) Ukažte, že $L(X)$ je komutativní, právě když $\dim X = 1$.

`Návod:` *(2) Pokud $\dim X \geq 2$, zvolte $x_1, x_2 \in X$ lineárně nezávislé. Ukažte, že existují $x_1^*, x_2^* \in X^*$, pro které $x_1^*(x_1) = x_2^*(x_2) = 1$ a $x_1^*(x_2) = x_2^*(x_1) = 0$. Uvažte operátory tvaru $x \mapsto x_i^*(x) x_j$ a jejich lineární kombinace.*

Příklad 11. Nechť X je Banachův prostor a nechť $A = K(X)$ je prostor kompaktních lineárních operátorů na X, uvažovaný jakožto podprostor $L(X)$.

(1) Ukažte, že A je uzavřená podalgebra $L(X)$, a je to tedy Banachova algebra.
(2) Ukažte, že A má jednotku, právě když $\dim X < \infty$.
(3) Ukažte, že A je komutativní, právě když $\dim X = 1$.
(4) Nechť $\dim X = \infty$. Nechť $B = \operatorname{span}(A \cup \{I\})$ jakožto podalgebra of $L(X)$. Ukažte, že B je (algebraicky) izomorfní A^+, ale ne izometrická.

`Návod:` *(3) Ukažte, že operátory použité v Příkladu 10(2) jsou kompaktní.*

Příklad 12. Nechť $(G, +)$ je komutativní grupa. Uvažujme na Banachově prostoru $\ell^1(G)$ násobení $*$ definované vzorcem

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(x - y), \qquad f, g \in \ell^1(G).$$

Ukažte, že $\ell^1(G)$ pak je komutativní Banachova algebra s jednotkou, a najděte její jednotku.

Příklad 13. Nechť $(G, \cdot)$ je nekomutativní grupa. Uvažujme na Banachově prostoru $\ell^1(G)$ násobení $*$ definované vzorcem

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x), \qquad f, g \in \ell^1(G).$$

Ukažte, že $\ell^1(G)$ pak je nekomutativní Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.

Příklad 14. Nechť $A = L^1(\mathbb{R}^n)$, kde $n \in \mathbb{N}$ (normu uvažujme standardní). Definujme na A násobení $*$ jakožto konvoluci, tj.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n, f, g \in A.$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra.
(2) Ukažte, že A nemá jednotku.

`Návod:` *(1) Použijte vlastnosti konvoluce. (2) Nechť g je jednotka. Pak pro každé $r > 0$ platí $g * \chi_{B(0,r)} = \chi_{B(0,r)}$. Z toho odvoďte, že $\chi_{B(0,r)}(x) = \int_{B(x,r)} g$ pro skoro všechna x, speciálně $\int_{B(x,r)} g = 1$ skoro všude na $B(0, r)$. Pro dost malé r odvoďte spor s tím, že $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Příklad 15. Nechť $A = L^1([0, 1])$ (normu uvažujme standardní). Definujme na A násobení $*$ jakožto konvoluci, tj.

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y)g(x - y \mod 1)\,\mathrm{d}y, \quad x \in [0, 1], f, g \in A.$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra.
(2) Ukažte, že A nemá jednotku.

`Návod:` *(1) Použijte podobný postup jako při důkazu vlastností konvoluce. (2) Postupujte analogicky jako v Příkladu 14(2).*

Příklad 16. Nechť $(G, +)$ je komutativní kompaktní topologická grupa. (Tj., $(G, +)$ je komutativní grupa opatřená Hausdorffovou topologií, v níž jsou operace $(x, y) \mapsto x + y$ a $x \mapsto -x$ spojité, která je navíc v této topologii kompaktní.) Nechť $\mathcal{M}(G)$ je prostor všech komplexních Radonových měr na G, norma na něm nechť je totální variace a násobení $*$ je definované vzorcem

$$(\mu * \nu)(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G; x + y \in A\}),$$

kde $\mu \times \nu$ značí příslušnou součinovou míru. Ukažte, že $\mathcal{M}(G)$ pak je komutativní Banachova algebra s jednotkou, a najděte její jednotku.

Příklad 17. Nechť $(G, \cdot)$ je nekomutativní kompaktní topologická grupa. (Tj., $(G, \cdot)$ je nekomutativní grupa opatřená Hausdorffovou topologií, v níž jsou operace $(x, y) \mapsto x \cdot y$ a $x \mapsto x^{-1}$ spojité, která je navíc v této topologii kompaktní.) Nechť $\mathcal{M}(G)$ je prostor všech komplexních Radonových měr na G, onorma na něm nechť je totální variace a násobení $*$ je definované vzorcem

$$(\mu * \nu)(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G; x \cdot y \in A\}),$$

kde $\mu \times \nu$ značí příslušnou součinovou míru. Ukažte, že $\mathcal{M}(G)$ pak je nekomutativní Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.

Příklad 18. Ukažte, že prvek maticové algebry M_n má pravou inverzi, právě když má levou inverzi.

Příklad 19. Nechť $A = L(\ell^2)$. Definujme dva operátory $S, T \in A$ vzorcem

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \qquad \text{a} \qquad T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

(1) Ukažte, že S a T nejsou invertibilní.
(2) Ukažte, že S má pravou inverzi a popište všechny pravé inverze.
(3) Ukažte, že T má a levou inverzi a popište všechny levé inverze.

Příklad 20. Nechť $G = (\mathbb{Z}_n, +)$ kde $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ opatřená sčítáním modulo n. Nechť $A = \ell^1(G)$ je Banachova algebra popsaná v Příkladu 12.

(1) Reprezentujte A jako podalgebru maticové algebry M_n (s příslušnou normou).
(2) Pro $n = 2$ a $n = 3$ explicitně characterizujte invertibilní prvky v A.

`Návod:` *(1) Vnořte A do $L(A)$.*

Příklad 21. Nechť A je Banachova algebra. Definujme na A nové násobení $\odot$ vzorcem

$$x \odot y = y \cdot x, \quad x, y \in A.$$

(1) Ukažte, že $A^{op} = (A, \odot)$ je Banachova algebra.
(2) Ukažte, že A^{op} nemusí být (algebraicky) izomorfní A.
(3) Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Ukažte, že $L(X)^{op}$ je izometricky izomorfní $L(X^*)$.
(4) Nechť H je Hilbertův prostor. Ukažte, že $L(H)^{op}$ je izometricky izomorfní $L(H)$.

`Návod:` *(2) Použijte Příklad 4.*

2. Spektrum a jeho vlastnosti

Příklad 22. Nechť $A = \mathcal{C}(K)$ pro kompaktní Hausdorffův prostor K a nechť $f \in A$.

(1) Ukažte, že $\sigma(f) = f(K)$.
(2) Spočtěte rezolventní funkci f.

Příklad 23. Nechť $A = \mathcal{C}_0(T)$ pro nekompaktní lokálně kompaktní prostor T.

(1) Ukažte, že $\sigma(f) = f(T) \cup \{0\}$ pro každé $f \in A$.
(2) Předpokládejme, že T není σ-kompaktní. Ukažte, že $\sigma(f) = f(T)$ pro $f \in A$.
(3) V případě $T = \mathbb{R}$ najděte příklad $f \in A$ splňující $f(T) \subsetneq \sigma(f)$.

`Návod:` *(1) Použijte definici $\sigma_A(f) = \sigma_{A^+}(f)$ a popis A^+ (například ten z Příkladu 8(3)). (2) $\{t \in T; f(T) \neq 0\}$ je σ-kompaktní.*

Příklad 24. Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z}_n)$ (viz Příklad 20) a $x \in A$.

(1) Characterizujte $\sigma(x)$ jako množinu vlastních čísel jisté matice.
(2) Pro $n = 2, 3$ spočtěte $\sigma(x)$ a rezolventní funkci explicitně.

`Návod:` *Použijte výsledky Příkladu 20.*

Příklad 25. Nechť $\mathbb{T} = \{z \in \mathcal{C}; |z| = 1\}$, $A = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ a $f(z) = z$ pro $z \in \mathbb{T}$. Nechť B je uzavřená podalgebra A s jednotkou generovaná f, tj.,

$$B = \overline{\operatorname{span}}\{1, f, f^2, f^3, \dots\}.$$

Spočtěte a porovnejte $\sigma_A(f)$ a $\sigma_B(f)$.

Příklad 26. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a nechť $x \in A$ splňuje $x^n = \boldsymbol{o}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Určete $\sigma(x)$ a spočtěte rezolventní funkci.

Příklad 27. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a nechť $x \in A$ splňuje $x^2 = x$. Určete $\sigma(x)$ a spočtěte rezolventní funkci.

`Návod:` *Rozlište tři případy: $x = \boldsymbol{o}$, $x = e$ a $x \notin \{\boldsymbol{o}, e\}$. Inverzi $\lambda e - x$ najděte ve tvaru $\alpha e + \beta x$ pro vhodná $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

Příklad 28. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a nechť $x \in A$ splňuje $x^3 = x$. Určete $\sigma(x)$ a spočtěte rezolventní funkci.

`Návod:` *Je třeba rozlišit několik případů: Případ $x^2 = x$ je obsažen v Příkladu 27. Případ $x^2 = -x$ lze vyřešit podobně jako Příklad 27. Další případ je $x^2 = e$. Nakonec, pokud $x^2 \notin \{e, x, -x\}$, ukažte, že e, x, x^2 jsou lineárně nezávislé a najděte inverzi $\lambda e - x$ jako lineární kombinaci e, x, x^2.*

Příklad 29. Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ (viz Příklad 12) a $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Ukažte, že $\sigma(\boldsymbol{e}_n) = \mathbb{T}$ (kde $\boldsymbol{e}_n$ je příslušný kanonický vektor) a že

$$R(\lambda, \boldsymbol{e}_n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{e}_{kn}}{\lambda^{k+1}}, & |\lambda| > 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} -\lambda^k \boldsymbol{e}_{-kn}, & |\lambda| < 1. \end{cases}$$

`Návod:` *Tvrzení lze dokázat přímo řešením rovnice $(\lambda \boldsymbol{e}_0 - \boldsymbol{e}_n) * f = \boldsymbol{e}_0$. Také lze využít výpočet rezolventní funkce pomocí Neumannovy řady.*

3. Holomorfní funkční kalkulus

Příklad 30. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a nechť f je celá funkce. Nechť

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

je její Taylorův rozvoj. Ukažte, že pro každé $x \in A$ platí

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

`Návod:` *Protože f je celá, lze v definici holomorfního kalkulu integrovat podél kružnice o středu v nule a dost velkém poloměru.*

Příklad 31. Nechť $A = M_n$ a $D \in A$ je diagonální matice s prvky $d_1, \dots, d_n$ na diagonále.

(1) Ukažte, že $\sigma(D) = \{d_1, \dots, d_n\}$ a spočtěte rezolventní funkci.
(2) Nechť f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(D)$. Ukažte, že $\tilde{f}(D)$ je diagonální matice s prvky $f(d_1), \dots, f(d_n)$ na diagonále.
(3) Z předchozího odvoďte, že v tomto případě $\tilde{f}(D)$ závisí pouze na $f|_{\sigma(D)}$.

`Návod:` *(2) Uvažte cyklus sestávající z dost malých kružnic o středech $d_1, \dots, d_n$ a použijte Cauchyův vzorec pro kruh.*

Příklad 32. Nechť $A = M_n$ kde $n \geq 2$ a nechť $J \in A$ je Jordanova buňka s hodnotou z na diagonále, tj.,

$$J = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z \end{pmatrix}.$$

(1) Ukažte, že $\sigma(J) = \{z\}$.
(2) Ukažte, že

$$(\lambda I - J)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - z} & \frac{1}{(\lambda-z)^2} & \cdots & \frac{1}{(\lambda-z)^n} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-z} & \cdots & \frac{1}{(\lambda-z)^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda-z} \end{pmatrix} \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{z\}.$$

(3) Nechť f je funkce holomorfní na okolí z. Ukažte, že

$$\tilde{f}(J) = \begin{pmatrix} f(z) & f'(z) & \frac{f''(z)}{2} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} \\ 0 & f(z) & f'(z) & \dots & \frac{f^{(n-2)}(z)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(z) \end{pmatrix}$$

(4) Z předchozího odvoďte, že v tomto případě hodnota $\tilde{f}(J)$ není určena pouze $f|_{\sigma(J)}$.

`Návod:` *(3) Uvažte integrál podél dost malé kružnice o středu z a použijte Cauchyův vzorec pro vyšší derivace.*

Příklad 33. Nechť $A = M_n$ a $E \in A$ je libovolná matice. Nechť f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(E)$.

(1) Vyjádřete $\tilde{f}(E)$ pomocí Jordanova kanonického tvaru E.
(2) Characterizujte ty matice E, pro které je $\tilde{f}(E)$ určeno pouze $f|_{\sigma(E)}$.

Příklad 34. Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z}_2)$ nebo $A = \ell_1(\mathbb{Z}_3)$. Pro $x \in A$ a f holomorfní na okolí $\sigma(x)$ spočtěte $\tilde{f}(x)$.

Příklad 35. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$ je prvek splňující jednu z následujících podmínek:

(1) $x^n = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x^2 = x$;
(3) $x^2 = -x$;
(4) $x^2 = e$;
(5) $x^3 = x$, ale žádná z podmínek (2)–(4) neplatí.

Nechť f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(x)$. Spočtěte $\tilde{f}(x)$. V kterých případech je tato hodnota určena pouze $f|_{\sigma(x)}$?

Příklad 36. Nechť $A = \mathcal{C}(K)$, nechť $g \in A$ a nechť F je funkce holomorfní na okolí $\sigma(g) = g(K)$. Ukažte, že $\tilde{F}(g) = F \circ g$.

Příklad 37. Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ (cf. Příklad 12) a $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Z Příkladu 29 víme, že $\sigma(\boldsymbol{e}_n) = \mathbb{T}$. Nechť g je funkce holomorfní na okolí $\mathbb{T}$. Ukažte, že

$$\tilde{g}(\boldsymbol{e}_n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_{kn},$$

kde $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ jsou koeficienty v Laurentově rozvoji g na okolí $\mathbb{T}$.

`Návod:` *Buď lze použít definice a vzorec z Příkladu 29, nebo lze dokázat a použít analogii tvrzení z Příkladu 30 pro Laurentovy řady.*

4. Ideály, multiplikativní funkcionály a Gelfandova transformace

Příklad 38. Nechť $A = \mathcal{C}(K)$.

(1) Nechť I je vlastní uzavřený ideál v A. Ukažte, že existuje neprázdná uzavřená množina $F \subset K$ splňující
$$I = \{f \in \mathcal{C}(K); f|_F = 0\}.$$
(2) Ukažte, že maximální ideály v A jsou právě podprostory tvaru
$$I = \{f \in \mathcal{C}(K); f(x) = 0\},$$
kde $x \in K$.
(3) Z předchozího odvoďte, že multiplikativní funkcionály na A jsou právě funkcionály tvaru $f \mapsto f(x)$, kde $x \in K$.
(4) Vysvětlete a dokažte tvrzení, že Gelfandova transformace algebry A je identické zobrazení.

`Návod:` *(1) Položte $F = \{x \in K; \forall f \in I : f(x) = 0\}$. Ukažte, že $F \neq \emptyset$ (jinak z kompaktnosti a z definice ideálu odvoďte, že $1 \in I$). Podobně ukažte, že pro každou uzavřenou množinu H disjunktní s F existuje nezáporná $f \in I$, která je na H kladná. S použitím Tietzeho věty a vlastnosti ideálu dále ukažte, že existuje $g \in I$, která nabývá hodnot z $[0,1]$ a je rovna 1 na H. Z toho nakonec odvoďte, že každou funkci nulovou na F lze libovolně přesně aproximovat funkcí z I.*

Příklad 39. Nechť $A = M_n$, kde $n \geq 2$. Ukažte, že jediný vlastní oboustranný ideál v A je nulový.

`Návod:` *Předpokládejte, že I je nenulový ideál. Ukažte, že obsahuje alespoň jednu matici, která má právě jeden nenulový prvek, z toho následně odvoďte, že obsahuje všechny takové matice.*

Příklad 40. Nechť $A = \ell^1(G)$, kde $(G, +)$ je komutativní grupa (viz Příklad 12). Připomeňme, že pak $A^* = \ell^\infty(G)$. Ukažte, že $\varphi \in \ell^\infty(G)$ patří do $\Delta(A)$, právě když je to grupový homomorfismus do jednotkové kružnice (tj. $\varphi : G \to \mathbb{T}$ a pro $g_1, g_2 \in G$ platí $\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$).

`Návod:` *Uvažte, že $e_{g_1} * e_{g_2} = e_{g_1+g_2}$. K tomu, že hodnoty jsou v $\mathbb{T}$ použijte omezenost φ a grupové operace.*

Příklad 41. Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z})$.

(1) Popište $\Delta(A)$ a vysvětlete, jak rozumět v tomto případě rovnosti $\Delta(A) = \mathbb{T}$.
(2) Popište Gelfandovu transformaci A a pomocí ní vyjádřete spektrum obecného prvku A.
(3) Je Gelfandova transformace prostá? Pokud ano, jak vypadá inverzní zobrazení?
(4) Jaký je obor hodnot Gelfandovy transformace? Je na?

`Návod:` *(1) Použijte Příklad 40 a uvažte zobrazení $\Delta(A) \ni \varphi \mapsto \varphi(1)$. (3) Použijte znalosti Fourierových řad. (4) Ne každá spojitá funkce má absolutně konvergentní Fourierovu řadu.*

Příklad 42. Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z}_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(1) Popište $\Delta(A)$ a ukažte, že má právě n prvků.
(2) Popište Gelfandovu transformaci A a pomocí ní vyjádřete spektrum obecného prvku A.
(3) Je Gelfandova transformace prostá? Pokud ano, jak vypadá inverzní zobrazení?
(4) Jaký je obor hodnot Gelfandovy transformace? Je na?

`Návod:` *(1) Použijte Příklad 40 a uvažte zobrazení $\Delta(A) \ni \varphi \mapsto \varphi(1)$. (3,4) Mimo jiné využijte vlastnosti prostorů konečné dimenze.*

Příklad 43. Nechť $A = L^1(\mathbb{R}^n)$ (viz Příklad 14). Připomeňme, že $A^* = L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dále platí

$$\Delta(A) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}; \varphi \text{ je spojitá a } \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot \varphi(\boldsymbol{y})\},$$

což je známý netriviální fakt.

(1) Ukažte, že prvky $\Delta(A)$ jsou právě funkce $\boldsymbol{x} \mapsto e^{i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}$, kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.
(2) Vysvětlete, jak rozumět často uváděné rovnosti $\Delta(A) = \mathbb{R}^n$.
(3) Popište Gelfandovu transformaci A a vysvětlete její vztah k Fourierově transformaci.

Příklad 44. Uvažme $\mathbb{T}$ jako kompaktní grupu s operací násobení, tj. $\mathbb{T} = \{e^{it}; t \in [0, 2\pi)\} = \{e^{it}; t \in \mathbb{R}\}$. Nechť $A = L^1(\mathbb{T})$ se standardní normou a s násobením definovaným pomocí konvoluce, tj.

$$\|f\| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{it}) \right| \, \mathrm{d}t, \quad (f * g)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{is}) g(e^{i(t-s)}) \, \mathrm{d}s.$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra bez jednotky.
(2) S využitím reprezentace $A^* = L^\infty(\mathbb{T})$ a známého netriviálního faktu, že

$$\Delta(A) = \{\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}; \varphi \text{ je spojitá a } \forall x, y \in \mathbb{T} : \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)\},$$

ukažte, že prvky $\Delta(A)$ jsou právě funkce $x \mapsto x^n$ pro $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $e^{it} \mapsto e^{int}$).
(3) Vysvětlete, jak rozumět často uváděné rovnosti $\Delta(A) = \mathbb{Z}$.
(4) Popište Gelfandovu transformaci A a vysvětlete její vztah k Fourierovým řadám.

`Návod:` *(1) Ukažte, že jde o jiný popis algebry z Příkladu 15.*

Příklad 45. Nechť A je komutativní Banachova algebra s jednotkou a nechť $K \subset \Delta(A)$. Předpokládejme, že pro každé $x \in A$ platí $\sigma(x) = \widehat{x}(K)$. Dále předpokládejme, že existuje takové $y \in A$, že nejmenší uzavřená podalgebra algebry A, která obsahuje y a s každým invertibilním prvek obsahuje i jeho inverzi, je rovna A. Ukažte, že $K = \Delta(A)$.

`Návod:` *Nechť $f \in \Delta(A)$ je libovolné. Ukažte, že existuje $g \in K$ takové, že $g(y) = f(y)$. Dále uvažte množinu $\{x \in A; g(x) = f(x)\}$ a s využitím předpokladů ukažte, že tato množina je rovna A.*