

VI.2 Slabé topologie na lokálně konvexních prostorech

Věta 6 (Mazurova věta). Necht' X je LCS a $A \subset X$ je konvexní množina. Pak platí:

- (a) $\overline{A}^w = \overline{A}$.
- (b) A je uzavřená, právě když je slabě uzavřená.

Důsledek 7. Necht' X je metrizable LCS a (x_n) posloupnost v X , která slabě konverguje k bodu $x \in X$. Pak existuje posloupnost (y_n) v X , která splňuje

- $y_n \in \text{co}\{x_k; k \geq n\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $y_n \rightarrow x$ v (původní topologii prostoru) X .

Věta 8 (omezenost a slabá omezenost). Necht' X je LCS a $A \subset X$. Pak A je omezená v X , právě když je omezená v $\sigma(X, X^*)$.

Tvrzení 9 (slabá topologie na podprostoru). Necht' X je LCS a $Y \subset\subset X$. Pak na Y splývá slabá topologie $\sigma(Y, Y^*)$ s restrikcí slabé topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y .

VI.3 Poláry a jejich aplikace

Definice. Necht' X je LCS. Necht' $A \subset X$ a $B \subset X^*$ jsou neprázdná množina. Pak definujeme

$$\begin{aligned} A^\triangleright &= \{f \in X^*; \forall x \in A : \text{Re } f(x) \leq 1\}, & B_\triangleright &= \{x \in X; \forall f \in B : \text{Re } f(x) \leq 1\}, \\ A^\circ &= \{f \in X^*; \forall x \in A : |f(x)| \leq 1\}, & B_\circ &= \{x \in X; \forall f \in B : |f(x)| \leq 1\}, \\ A^\perp &= \{f \in X^*; \forall x \in A : f(x) = 0\}, & B_\perp &= \{x \in X; \forall f \in B : f(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Množiny A^\triangleright a B_\triangleright nazýváme **poláry** množin A a B , množiny A° a B_\circ pak **absolutní poláry** a množiny A^\perp a B_\perp **anihilátory**.

Poznámky:

- (1) Terminologie a značení v literatuře kolísá. Někdy je slovem polára míněna absolutní polára, někdy se pro naši poláru používá značení A° , B_\circ .
- (2) Pokud X je Hausdorffův a prostor X^* opatříme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$, pak $(X^*, w^*)^* = X$, a tedy pro $B \subset X^*$ (zpětná) polára B_\triangleright dle předchozí definice splývá s polárou B^\triangleright vůči prostoru (X^*, w^*) a jeho duálu X . Podobně je tomu pro absolutní poláry a pro anihilátory.

Příklad 10. Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak platí

- (a) $(B_X)^\triangleright = (B_X)^\circ = B_{X^*}$,
- (b) $(B_{X^*})_\triangleright = (B_{X^*})_\circ = B_X$.

Tvrzení 11 (polárový kalkulus). Necht' X je LCS a $A \subset X$ neprázdná množina.

- (a) Množina A^\triangleright je konvexní a obsahuje nulový funkcionál, A° absolutně konvexní a A^\perp je podprostor X^* . Všechny tři množiny jsou navíc slabě* uzavřené.
- (b) $A^\perp \subset A^\circ \subset A^\triangleright$.
- (c) Je-li A vyvážená, je $A^\triangleright = A^\circ$. Je-li $A \subset\subset X$, je $A^\triangleright = A^\circ = A^\perp$.
- (d) $\{\mathbf{o}\}^\triangleright = \{\mathbf{o}\}^\circ = \{\mathbf{o}\}^\perp = X^*$, $X^\triangleright = X^\circ = X^\perp = \{\mathbf{o}\}$.
- (e) Pro $c > 0$ platí $(cA)^\triangleright = \frac{1}{c}A^\triangleright$, $(cA)^\circ = \frac{1}{c}A^\circ$.
- (f) Necht' $(A_i)_{i \in I}$ je neprázdný systém neprázdných podmnožin X . Pak $(\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$. Analogický vzorec platí i pro poláry a anihilátory.

Poznámka: Analogická tvrzení platí i pro $B \subset X^*$ a množiny B_\triangleright , B_\circ , B_\perp . Jsou jen dva rozdíly: Množiny B_\triangleright , B_\circ a B_\perp jsou slabě uzavřené a pro platnost analogie druhého tvrzení v bodě (d) je třeba předpokládat, že X je Hausdorffův.

Věta 12 (o bipoláře). Necht' X je LCS a $A \subset X$ a $B \subset X^*$ jsou neprázdné množiny. Pak platí

$$\begin{aligned} (A^\triangleright)_\triangleright &= \overline{\text{co}}(A \cup \{\mathbf{o}\}) (= \overline{\text{co}}^{\sigma(X, X^*)}(A \cup \{\mathbf{o}\})), & (B_\triangleright)^\triangleright &= \overline{\text{co}}^{\sigma(X^*, X)}(B \cup \{\mathbf{o}\}), \\ (A^\circ)_\circ &= \overline{\text{aco}}A (= \overline{\text{aco}}^{\sigma(X, X^*)}A), & (B_\circ)^\circ &= \overline{\text{aco}}^{\sigma(X^*, X)}B, \\ (A^\perp)_\perp &= \overline{\text{span}}A (= \overline{\text{span}}^{\sigma(X, X^*)}A), & (B_\perp)^\perp &= \overline{\text{span}}^{\sigma(X^*, X)}B. \end{aligned}$$

Důsledek 13. Necht' X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak $(\ker T)^\perp = \overline{T'(X^*)}^{w^*}$.

Věta 14 (Goldstine). Necht' X je normovaný lineární prostor a $\varkappa : X \rightarrow X^{**}$ kanonické vnoření. Pak platí

$$B_{X^{**}} = \overline{\varkappa(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)}.$$

Věta 15 (Banach-Alaoglu). Necht' X je LCS a $U \subset X$ je okolí \mathbf{o} . Pak platí:

- (a) U° je slabě* kompaktní podmnožina X^* (tj., je kompaktní v topologii $\sigma(X^*, X)$).
- (b) Je-li navíc X separabilní, je U° je v topologii $\sigma(X^*, X)$ metrizable.

Důsledek 16 (Banach-Alaoglu pro normované prostory). Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak (B_{X^*}, w^*) je kompaktní. Je-li X separabilní, je (B_{X^*}, w^*) navíc metrizable.

Důsledek 17 (reflexivní prostory a slabá kompaktnost). Necht' X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní. Je-li X reflexivní a separabilní, je (B_X, w) navíc metrizable.

Důsledek 18. Necht' X je reflexivní Banachův prostor. Pak každá omezená posloupnost v X má slabě konvergentní podposloupnost.