VI. Slabé topologie

VI.1 Obecné slabé topologie a dualita

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$.

- Symbolem $X^{\#}$ značíme **algebraický duál** prostoru X, tj. vektorový prostor všech lineárních funkcionálů $f : X \to \mathbb{F}$.
- Nechť $M \subset X^{\#}$ je neprázdná množina. Pak symbolem $\sigma(X, M)$ značíme topologii na X, které je generovaná systémem pseudonorem
$$\{x \mapsto |f(x)|; f \in M\}.$$
Nazýváme ji **slabou topologií generovanou** M.

Větička 1.

(1) *Prostor X opatřený topologií $\sigma(X, M)$ je LCS.*
(2) *Topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M* **odděluje body** *X, tj., právě když pro každé $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ existuje $f \in M$ splňující $f(x) \neq 0$.*
(3) *Funkcionály z M jsou spojité na $(X, \sigma(X, M))$.*
(4) *$\sigma(X, M)$ je nejslabší (tj. nejmenší) topologie na X, vůči níž jsou všechny funkcionály z M spojité.*
(5) *$\sigma(X, M) = \sigma(X, \operatorname{span} M)$.*
(6) *Nechť T je topologický prostor a $F : T \to X$ libovolné zobrazení. Pak F je spojité zobrazení T do $(X, \sigma(X, M))$, právě když pro každé $f \in M$ je $f \circ F$ spojité na X.*

Příklady 2.

(1) *Nechť X je TVS. Pak $X^* \subset\subset X^{\#}$, topologii $\sigma(X, X^*)$ nazýváme* **slabou topologií prostoru** *X, někdy ji značíme též symbolem w. Je-li X Hausdorffův a lokálně konvexní, je i topologie $\sigma(X, X^*)$ Hausdorffova.*
(2) *Nechť X je LCS (nebo, obecněji, TVS). Definujme zobrazení $\varkappa : X \to (X^*)^{\#}$ předpisem*
$$\varkappa(x)(f) = f(x), f \in X^*, x \in X.$$
Pak $\varkappa(X)$ je podprostor $(X^*)^{\#}$ oddělující body X^*, a tedy topologie $\sigma(X^*, \varkappa(X))$ je Hausdorffova. Nazývá se **slabá* topologie** *prostoru X^*, značí se $\sigma(X^*, X)$ nebo také w^*.*
(3) *Nechť Γ je neprázdná množina a prostor $\mathbb{F}^{\Gamma}$ je opatřen součinovou topologií (viz Příklad V.1(2)). Součinová topologie je rovna $\sigma(\mathbb{F}^{\Gamma}, M)$, kde $M = \{\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}(\gamma); \gamma \in \Gamma\}$.*
(4) *Nechť T je topologický prostor a $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ vektorový prostor spojitých funkcí na T. Pro $t \in T$ definujme funkcionál $\varepsilon_t \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F})^{\#}$ předpisem*
$$\varepsilon_t(f) = f(t), \quad f \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F}).$$
Pak $M = \{\varepsilon_t; t \in T\}$ je podmnožina $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})^{\#}$ oddělující body $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$, topologie $\sigma(\mathcal{C}(T, \mathbb{F}), M)$ je tedy Hausdorffova. Nazývá se **topologií bodové konvergence***, značí se τ_p nebo $\tau_p(T)$.*
(5) *Při značení z předchozího bodu nechť navíc $D \subset T$ je neprázdná podmnožina a $M_D = \{\varepsilon_t; t \in D\}$. Topologie $\sigma(\mathcal{C}(T, \mathbb{F}), M_D)$ se nazývá* **topologií bodové konvergence na množině** *D, značí se $\tau_p(D)$. Je-li D hustá v T, pak je topologie $\tau_p(D)$ Hausdorffova.*

Lemma 3. *Nechť X je vektorový prostor, $f, f_1, \dots, f_k \in X^{\#}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_k\}$;
(ii) $\exists C > 0\, \forall x \in X : |f(x)| \leq C \cdot \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_k(x)|\}$;
(iii) $\bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f$.

Věta 4. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$ neprázdná množina. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \operatorname{span} M$.*

Důsledek 5.

(a) *Nechť X je TVS a $f \in X^{\#}$. Pak f je spojitý na X (tj. $f \in X^*$), právě když je slabě spojitý (tj. $\sigma(X, X^*)$-spojitý) na X.*
(b) *Nechť X je TVS. Pak $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = \varkappa(X)$ (viz Příklad 2(2)).*
(c) *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^{**}$. Pak $f \in \varkappa(X)$ (kde $\varkappa : X \to X^{**}$ je kanonické vnoření), právě když f je slabě* spojitý (tj. $\sigma(X^*, X)$ spojitý) na X^*.*