

VIII.6 Spojitý funkční kalkulus pro C^* algebry

Tvrzení 36. Necht' A je C^* -algebra a $B \subset A$ její C^* -podalgebra.

- (a) Pro každé $x \in B$ platí $\sigma_B(x) \cup \{0\} = \sigma_A(x) \cup \{0\}$.
- (b) Pokud A má jednotku e a navíc $e \in B$, pak pro každé $x \in B$ platí $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. Speciálně, $G(B) = B \cap G(A)$.

Theorem 37 (Fuglede). Necht' A je C^* -algebra a $x \in A$ je normální prvek. Pokud $y \in A$ komutuje s x , pak komutuje také s x^* .

Věta 38 (spojitý funkční kalkulus pro C^* -algebry s jednotkou). Necht' A je C^* -algebra s jednotkou e a $x \in A$ je normální prvek. Necht' B je uzavřená podalgebra algebry A generovaná množinou $\{e, x, x^*\}$. Pak platí:

- B je komutativní C^* algebra s jednotkou e .
- Zobrazení $h : \varphi \mapsto \varphi(x)$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\sigma(x)$.

Necht' $\Gamma : B \rightarrow \mathcal{C}(\Delta(B))$ je Gelfandova transformace algebry B . Pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ označme

$$\tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}(f \circ h).$$

Pak zobrazení $\Phi : f \mapsto \tilde{f}(x)$, které se nazývá **spojitý funkční kalkulus pro prvek x** , má následující vlastnosti:

- (a) Φ je izometrický *-izomorfismus C^* -algebry $\mathcal{C}(\sigma(x))$ na B .
- (b) $\tilde{id}(x) = x$, $\tilde{1}(x) = e$.
- (c) Je-li p polynom, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$.
- (d) $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.
- (e) Jestliže $y \in A$ komutuje s x , pak y komutuje s $\tilde{f}(x)$ pro každé $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

Navíc, Φ je jediné zobrazení splňující první dvě podmínky.

Poznámka: Dle Tvrzení 36 je v předchozí větě $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$, proto píšeme jen $\sigma(x)$.

Věta 39 (spojitý funkční kalkulus pro obecné C^* -algebry). Necht' A je C^* -algebra (s jednotkou či bez) a $x \in A$ je normální prvek. Necht' B je uzavřená podalgebra algebry A generovaná množinou $\{x, x^*\}$. Pak platí:

- B je komutativní C^* algebra.
- Zobrazení $h : \varphi \mapsto \varphi(x)$ je homeomorfismus $\Delta(B) \cup \{0\}$ na $\sigma(x) \cup \{0\}$.

Necht' $\Gamma : B \rightarrow \mathcal{C}_0(\Delta(B))$ je Gelfandova transformace algebry B . Pro $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ označme

$$\tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}(f \circ h).$$

Pak zobrazení $\Phi : f \mapsto \tilde{f}(x)$, které se nazývá **spojitý funkční kalkulus pro prvek x** , má následující vlastnosti:

- (a) Φ je izometrický *-izomorfismus C^* -algebry $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ na B .
- (b) $\tilde{id}(x) = x$.
- (c) Je-li p polynom splňující $p(0) = 0$, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$.
- (d) $\sigma(\tilde{f}(x)) \cup \{0\} = f(\sigma(x) \setminus \{0\}) \cup \{0\}$ pro $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$.
- (e) Jestliže $y \in A$ komutuje s x , pak y komutuje s $\tilde{f}(x)$ pro každé $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$.

Navíc, Φ je jediné zobrazení splňující první dvě podmínky.

Poznámky:

- (1) Dle Tvrzení 36 je v předchozí větě $\sigma_A(x) \cup \{0\} = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, a tedy i $\sigma_A(x) \setminus \{0\} = \sigma_B(x) \setminus \{0\}$. Proto všude píšeme jen $\sigma(x)$.
- (2) Algebra B ve Větě 39 má jednotku, právě když $\sigma(x) \setminus \{0\}$ je kompaktní. Tato jednotka může být různá od jednotky algebry A , pokud ta ji má. Jsou tyto možnosti:
 - (a) $0 \notin \sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. Pak A má jednotku a tato jednotka patří do B , x is invertibilní (v A i v B).
 - (b) $0 \in \sigma_A(x) \setminus \sigma_B(x)$. Pak B má jednotku, která není jednotkou v A (buď A nemá jednotku, nebo má jednotku, která nepatří do B), a x je invertibilní v B (nikoli v A).
- (3) Pokud $\sigma(x) \setminus \{0\}$ je kompaktní, pak $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ je totéž co $\mathcal{C}(\sigma(x) \setminus \{0\})$.
- (4) Pokud $0 \in \sigma(x)$ (což nastává vždy, když $\sigma(x) \setminus \{0\}$ není kompaktní, ale nejen tehdy), pak lze ztotožnit $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\}) = \{f \in \mathcal{C}(\sigma(x)); f(0) = 0\}$.