

VIII.5 C*-algebry – základní vlastnosti

Definice. Necht' A je Banachova algebra.

- **Involucí** na A rozumíme zobrazení $x \mapsto x^*$ algebry A do sebe takové, že pro všechna $x, y \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí:

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*, \quad (xy)^* = y^*x^* \quad \text{a} \quad x^{**} = x.$$

- Banachova algebra A s involucí se nazývá **C*-algebra**, pokud pro každé $x \in A$ platí

$$\|x^*x\| = \|x\|^2.$$

- Je-li A Banachova algebra s involucí a $x \in A$, pak prvek x se nazývá **samoadjungovaný** (neboli **hermiteovský**), pokud $x^* = x$; **normální**, pokud $x^*x = xx^*$.

Poznámky.

- (1) Necht' A je Banachova algebra s involucí. Pak $e \in A$ je levá jednotka, právě když e^* je pravá jednotka. Tedy, má-li A levou jednotku nebo pravou jednotku, pak má jednotku a tato jednotka je samoadjungovaná.
- (2) Necht' A je Banachova algebra s involucí. Pokud pro každé $x \in A$ platí

$$\|x^*x\| = \|x\|^2,$$

pak je A C*-algebra.

- (3) Necht' A je C*-algebra. Zobrazení $x \mapsto x^*$ je sdruženě lineární izometrie A na A . Pro každé $x \in A$ tedy platí

$$\|x^*x\| = \|xx^*\| = \|x\|^2 = \|x^*\|^2.$$

Příklady 25.

- (1) Těleso komplexních čísel je komutativní C*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem $\lambda^* = \bar{\lambda}$ pro $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (2) Algebra $C_0(T)$, kde T je lokálně kompaktní prostor, je komutativní C*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem $f^*(t) = \overline{f(t)}$ pro $t \in T$.
- (3) Maticová algebra M_n je C*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem

$$\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right)^* = (\overline{a_{ji}})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}.$$

- (4) Je-li H Hilbertův prostor, pak algebry $L(H)$ a $K(H)$ jsou C*-algebry, pokud involucí T^* rozumíme adjungovaný operátor $k T$.
- (5) Na algebře $L^1(\mathbb{R}^n)$ lze involuci definovat buď předpisem $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$; nebo předpisem $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ani s jednou z těchto involucí není $L^1(\mathbb{R}^n)$ C*-algebra.

Tvrzení 26 (vlastnosti algeber s involucí). Necht' A je Banachova algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí:

- (a) Prvky $x + x^*$, $i(x - x^*)$, x^*x jsou samoadjungované.
- (b) Existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Navíc, x je normální, právě když $uv = vu$.
- (c) Má-li A jednotku, pak $x \in G(A)$, právě když $x^* \in G(A)$ (pak $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$).
- (d) $\sigma(x^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Tvrzení 27 (o spektrálním poloměru a normě normálního prvku). *Je-li A C^* -algebra a $a \in A$ je normální, pak $r(a) = \|a\|$.*

Důsledek 28. *Nechť A je algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma $\|\cdot\|$, pro kterou je $(A, \|\cdot\|)$ C^* -algebra.*

Tvrzení 29 (přidání jednotky). *Nechť A je Banachova algebra s involucí.*

- (a) A^+ je rovněž Banachova algebra s involucí, pokud involuci definujeme předpisem $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$ pro $(a, \lambda) \in A^+$.
- (b) Je-li A C^* -algebra, pak i A^+ je C^* -algebra, pokud involuci definujeme jako v bodě (a) a normu na A^+ definujeme vzorcem

$$\|(a, \lambda)\| = \max\{|\lambda|, \sup\{\|ab + \lambda b\|; b \in A, \|b\| \leq 1\}\}.$$

- (c) Je-li A C^* -algebra bez jednotky, pak normu z (b) lze vyjádřit ve tvaru

$$\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\|; b \in A, \|b\| \leq 1\}.$$

Poznámka: Norma na A^+ z Tvrzení 29(b) se liší od normy z Tvrzení 2(b). Z Důsledku 28 plyne, že definice z Tvrzení 29(b) je jediná možná.

Definice. Nechť A a B jsou C^* -algebry a $h : B \rightarrow A$. Říkáme, že h je ***-homomorfismus**, je-li to homomorfismus Banachových algeber splňující navíc $h(x^*) = h(x)^*$ pro každé $x \in B$.

Tvrzení 30 (o automatické spojitosti *-homomorfismu). *Nechť A a B jsou C^* -algebry a $h : B \rightarrow A$ je *-homomorfismus B do A . Pak $\|h\| \leq 1$.*

Příklad 31. *Nechť K, L jsou kompaktní Hausdorffovy prostory a $\varphi : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathcal{C}(L)$ je *-homomorfismus splňující $\varphi(1) = 1$. Pak existuje spojitě zobrazení $\alpha : L \rightarrow K$ takové, že $\varphi(f) = f \circ \alpha$ pro $f \in \mathcal{C}(K)$. Pokud φ je navíc prosté, pak $\alpha(L) = K$, a tedy φ je izometrie $\mathcal{C}(K)$ do $\mathcal{C}(L)$.*

Tvrzení 32. *Nechť A je C^* -algebra. Pak pro $a \in A$ platí:*

- (a) Je-li a samoadjungovaný, pak $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.
- (b) Má-li A jednotku a $a^* = a^{-1}$ (tj. a je **unitární**), pak $\sigma(a) \subset \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.
- (c) Pro $h \in \Delta(A)$ a $a \in A$ platí $h(a^*) = \overline{h(a)}$ (h je *-homomorfismus, je-li to homomorfismus).

Věta 33 (Gelfand-Naimark). *Nechť A je komutativní C^* -algebra. Pak Γ je izometrický *-izomorfismus C^* -algebry A na C^* -algebru $C_0(\Delta(A))$ (mimo jiné tedy platí identita $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$ na A).*

Speciálně, A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.

Důsledek 34. *Nechť A a B jsou komutativní C^* -algebry. Pak A a B jsou *-izomorfní, právě když $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.*

Důsledek 35. *Nechť A a B jsou C^* -algebry a $h : B \rightarrow A$ je prostý *-homomorfismus B do A . Pak h je izometrie A do B .*