

## VIII.4 Ideály, komplexní homomorfismy a Gelfandova transformace

**Definice.** Nechť  $A$  je Banachova algebra. **Ideálem** v  $A$  rozumíme vlastní vektorový podprostor  $I \subset A$  takový, že kdykoli  $x \in I$  a  $y \in A$ , platí  $xy \in I$  a  $yx \in I$ . **Maximálním ideálem** v algebře  $A$  rozumíme ideál, který je maximální vzhledem k inkluzi.

**Poznámky:**

- (1) Každý ideál je zároveň vlastní podalgebrou. Vlastní podalgebra nemusí být ideálem.
- (2) Zkoumají se i **levé ideály** (definované implikací  $x \in I, y \in A \Rightarrow yx \in I$ ) a **pravé ideály** (definované analogicky). Pak ideál je podprostor, který je zároveň levý ideál i pravý ideál. My se však jednostrannými ideály zabývat nebudeme.

**Tvrzení 18** (vlastnosti ideálů a maximálních ideálů). *Nechť  $A$  je Banachova algebra s jednotkou.*

- (a) Je-li  $I$  ideál v  $A$ , je  $I \cap G(A) = \emptyset$ .
- (b) Uzavěr ideálu v  $A$  je též ideálem v  $A$ .
- (c) Každý ideál  $I$  v  $A$  je obsažen v maximálním ideálu  $J$ .
- (d) Každý maximální ideál v  $A$  je uzavřený.

**Příklady 19.**

- (1) Je-li  $X$  nekonečněrozměrný Banachův prostor, pak  $K(X)$  je uzavřený ideál v Banachově algebře  $L(X)$ .
- (2) Jediný ideál v maticové algebře  $M_n$  (kde  $n \in \mathbb{N}$ ) je nulový ideál.
- (3) Nechť  $K$  je kompaktní Hausdorffův prostor. Pak všechny uzavřené ideály v Banachově algebře  $\mathcal{C}(K)$  jsou podprostory tvaru

$$\{f \in \mathcal{C}(K); f|_F = 0\}, \text{ kde } F \subset K \text{ je neprázdná uzavřená množina.}$$

**Tvrzení 20** (faktorizace algeber). *Je-li  $A$  Banachova algebra a  $I$  je uzavřený ideál v  $A$ , pak Banachův kvocient  $A/I$  je Banachova algebra se součinem  $q(x)q(y) = q(xy)$ , kde  $q$  je kvocientové zobrazení Banachova prostoru  $A$  na Banachův prostor  $A/I$ . Je-li  $A$  komutativní, je i  $A/I$  komutativní. Má-li  $A$  jednotku, má i  $A/I$  jednotku.*

**Definice.**

- Nechť  $A, B$  jsou Banachovy algebry. Zobrazení  $h : A \rightarrow B$  nazýváme **homomorfismem Banachových algeber** (krátce **homomorfismem**), pokud je lineární a navíc  $h(xy) = h(x)h(y)$  pro  $x, y \in A$ .
- **Komplexním homomorfismem** na Banachově algebře  $A$  rozumíme homomorfismus  $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ .
- Označme  $\Delta(A)$  množinu všech nenulových komplexních homomorfismů na  $A$ .

**Poznámky:**

- (1) V definici homomorfismu Banachových algeber není požadavek spojitosti. V některých důležitých případech je homomorfismus spojitý automaticky (viz například Tvrzení 21).
- (2) Je-li  $h : A \rightarrow B$  homomorfismus Banachových algeber, který není identicky roven nule, pak jeho jádro je ideálem v algebře  $A$ .
- (3) Z předchozí poznámky a z Příkladu 19(2) plyne, že pro  $n \geq 2$  je  $\Delta(M_n) = \emptyset$ .
- (4) Kvocientové zobrazení z Tvrzení 20 je homomorfismem Banachových algeber.

**Tvrzení 21** (vlastnosti komplexních homomorfismů). *Nechť  $A$  je Banachova algebra a nechť  $h \in \Delta(A)$ .*

- Má-li  $A$  jednotku  $e$ , pak platí:
  - (a)  $h(e) = 1$  a  $\|h\| = 1$ ;
  - (b)  $\ker h$  je maximální ideál v  $A$ ;
  - (c) je-li  $x \in G(A)$ , je  $h(x) \neq 0$ .
- Pro obecnou Banachovu algebru  $A$  (s jednotkou či bez) platí:
  - (d) Existuje právě jedno  $\tilde{h} \in \Delta(A^+)$ , které rozšiřuje  $h$  (tj. splňuje  $\tilde{h}(x, 0) = h(x)$  pro  $x \in A$ );
  - (e)  $\|h\| \leq 1$ ;
  - (f)  $h(x) \in \sigma(x)$  pro  $x \in A$ .

**Tvrzení 22** (vlastnosti  $\Delta(A)$ ). Necht'  $A$  je Banachova algebra.

- (a) Má-li  $A$  jednotku, je  $\Delta(A)$  slabě\* kompaktní podmnožina jednotkové sféry  $S_{A^*}$ .
- (b)  $\Delta(A^+) = \{\tilde{h}; h \in A\} \cup \{h_\infty\}$ , kde  $\tilde{h}$  je rozšíření  $h$  dané Tvrzením 21(d) a  $h_\infty(x, \lambda) = \lambda$  pro  $(x, \lambda) \in A^+$ .
- (c) Pokud  $A$  nemá jednotku, je  $\Delta(A)$  podmnožina jednotkové koule  $B_{A^*}$  a  $\Delta(A) \cup \{0\}$  je slabě\* kompaktní. Speciálně,  $\Delta(A)$  je lokálně kompaktní ve slabě\* topologii.

**Tvrzení 23** (komplexní homomorfismy a maximální ideály). Necht'  $A$  je Banachova algebra s jednotkou.

- (1) Je-li  $I$  ideál v  $A$  kodimenze jedna, pak existuje jediné  $h \in \Delta(A)$ , pro které  $I = \ker h$ .
- (2) Je-li  $A$  komutativní, pak  $h \mapsto \ker h$  je bijekce mezi  $\Delta(A)$  a množinou všech maximálních ideálů v  $A$ .

**Definice.** Necht'  $A$  je komutativní Banachova algebra.

- Necht'  $x \in A$ . Pro  $h \in \Delta(A)$  položme  $\hat{x}(h) = h(x)$ . Pak funkci  $\hat{x} : \Delta(A) \rightarrow \mathbb{C}$  nazýváme **Gelfandovou transformací prvku  $x$** . Z definic snadno plyne, že  $\hat{x}$  je spojitá komplexní funkce na  $\Delta(A)$ , navíc z Tvrzení 22(c) vidíme, že  $\hat{x} \in C_0(\Delta(A))$ .
- **Gelfandovou transformací algebry  $A$**  rozumíme zobrazení  $\Gamma : A \rightarrow C_0(\Delta(A))$  definované předpisem  $\Gamma(x) = \hat{x}$ ,  $x \in A$ .

**Věta 24** (vlastnosti Gelfandovy transformace). Necht'  $A$  je komutativní Banachova algebra a  $\Gamma : A \rightarrow C_0(\Delta(A))$  její Gelfandova transformace. Dále, necht'  $\Gamma^+ : A^+ \rightarrow C(\Delta(A^+))$  je Gelfandova transformace algebry  $A^+$ . K popisu  $\Delta(A^+)$  použijme Tvrzení 22(b) (včetně značení).

- (a)  $\Gamma$  je homomorfismus algebry  $A$  do algebry  $C_0(\Delta(A))$ .
- (b) Pro  $(x, \lambda) \in A^+$  platí

$$\begin{aligned}\Gamma^+(x, \lambda)(\tilde{h}) &= \Gamma(x)(h) + \lambda \quad \text{for } h \in \Delta(A), \\ \Gamma^+(x, \lambda)(h_\infty) &= \lambda.\end{aligned}$$

- (c) Má-li  $A$  jednotku, pak

$$\ker \Gamma = \text{rad}(A) := \bigcap \{I : I \text{ je maximální ideál v } A\}.$$

Speciálně,  $\Gamma$  je prostá (tj. je to izomorfismus algeber  $A$  a  $\Gamma(A) = \hat{A}$ ), právě když  $\text{rad}(A) = \{0\}$  (tj.  $A$  je **polojednoduchá**).

- (d)  $\Gamma$  je prostá, právě když  $\Gamma^+$  je prostá.
- (e) Má-li  $A$  jednotku, pak pro každé  $x \in A$  platí  $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma(x)$ .
- (f) Nemá-li  $A$  jednotku, pak pro každé  $x \in A$  platí  $\sigma(x) = \hat{x}(\Delta(A)) \cup \{0\}$ .
- (g) Pro každé  $x \in A$  platí  $\|\hat{x}\| = r(x)$ .
- (h)  $\Gamma$  je spojitý homomorfismus, splňuje  $\|\Gamma\| \leq 1$ .
- (i)  $\Gamma$  je topologický izomorfismus algeber  $A$  a  $\Gamma(A)$ , právě když  $\Gamma$  je prostá (viz (c,d)) a  $\hat{A} = \Gamma(A)$  je uzavřená.
- (j)  $\Gamma(A)$  odděluje body  $\Delta(A)$ .