V. Topologické vektorové prostory

V.1 Lineární topologie a jejich generování

Připomenutí značení:

$\mathbb{R}$ ... těleso reálných čísel

$\mathbb{C}$ ... těleso komplexních čísel

$\mathbb{F}$ ... těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, nulový vektor značíme $\boldsymbol{o}$ (a někdy také 0).

Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $Y \subset\subset X$ znamená, že Y je podprostor X.

Definice. **Topologickým vektorovým prostorem nad** $\mathbb{F}$ rozumíme dvojici $(X, \mathcal{T})$, kde X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $\mathcal{T}$ je topologie na X, která má následující dvě vlastnosti:

(1) Zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$ je spojité zobrazení $X \times X$ do X.
(2) Zobrazení $(t, x) \mapsto tx$ je spojité zobrazení $\mathbb{F} \times X$ do X.

Místo termínu *topologický vektorový prostor* budeme používat zkratku **TVS**. Je-li $(X, \mathcal{T})$ navíc Hausdorffův, píšeme **HTVS**.

Symbolem $\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ budeme rozumět systém všech okolí bodu $\boldsymbol{o}$ v $(X, \mathcal{T})$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS. Prostor X se nazývá **lokálně konvexní**, pokud existuje báze okolí nuly tvořená konvexními množinami. Termín *lokálně konvexní TVS* budeme zkracovat **LCS**, Hausdorffův pak **HLCS**.

Příklady 1.

(1) *Nechť* $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor a* $\mathcal{T}$ *nechť je topologie generovaná normou (tj. generovaná metrikou generovanou normou). Pak* $(X, \mathcal{T})$ *je HLCS.*
(2) *Nechť* Γ *je libovolná neprázdná množina. Pak* $\mathbb{F}^\Gamma$ *je HLCS, je-li opatřen součinovou topologií.*
(3) *Prostor* $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ *spojitých funkcí na* $\mathbb{R}$ *je HLCS, pokud je opatřen topologií lokálně stejnoměrné konvergence. Ta je generovaná například metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \max\{|f(x) - g(x)|\,; x \in [-n, n]\}\}, \quad f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F}).$$

(4) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina. Pak prostor* $H(\Omega)$ *holomorfních funkcí na* Ω *je HLCS, pokud je opatřen topologií lokálně stejnoměrné konvergence. Ta je generovaná například metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \max\{|f(z) - g(z)|\,; z \in K_n\}\}, \quad f, g \in H(\Omega),$$

kde (K_n) *je posloupnost kompaktních množin vyčerpávající* Ω *(tj. splňující* $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\bigcup_n K_n = \Omega$*).*
(5) *Schwartzův prostor* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *je HLCS, pokud je opatřen topologií generovanou standardní metrikou.*
(6) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená množina a* $K \subset \Omega$ *je kompaktní podmnožina. Pak prostor* $\mathscr{D}_K(\Omega)$ *je HLCS, pokud je opatřen topologií generovanou standardní metrikou.*
(7) *Nechť* (Ω, Σ, μ) *je prostor s nezápornou mírou a* $p \in (0, 1)$*. Pak prostor* $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *tvořený třídami ekvivalence měřitelných funkcí* $f : \Omega \to \mathbb{F}$ *splňujících* $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$ *je HTVS, pokud je opatřen topologií generovanou metrikou*

$$\rho(f, g) = \int_\Omega |f - g|^p \,\mathrm{d}\mu, \qquad f, g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu).$$

Pokud například $\Omega = [0, 1]$ *a* μ *je Lebesgueova míra nebo* $\Omega = \mathbb{N}$ *a* μ *je sčítací míra, pak tento prostor není lokálně konvexní.*

Poznámka: Je-li $(X, \mathcal{T})$ TVS, pak $\mathcal{T}$ je invariantní vůči posunutí. Tj., je-li $A \subset X$ a $x \in X$, pak A je otevřená, právě když $x + A$ je otevřená. Z toho plyne, že množina $A \subset X$ je okolím bodu $x \in X$, právě když $-x + A \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$. Proto systém $\mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ jednoznačně určuje topologii $\mathcal{T}$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $A \subset X$. Říkáme, že množina A je

- **konvexní**, pokud pro každé $x, y \in A$ a každé $t \in [0,1]$ platí $tx + (1-t)y \in A$;
- **symetrická**, pokud $A = -A$;
- **vyvážená**, pokud pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ splňující $|\alpha| \leq 1$ platí $\alpha A \subset A$;
- **absolutně konvexní**, je-li konvexní a vyvážená;
- **pohlcující**, pokud pro každé $x \in X$ existuje $t > 0$, že $\{sx; s \in [0,t]\} \subset A$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $A \subset X$. **Konvexním obalem** (**vyváženým obalem**, resp. **absolutně konvexním obalem**) množiny A rozumíme nejmenší konvexní (vyváženou, resp. absolutně konvexní) množinu obsahující A. Tuto množinu značíme $\operatorname{co}(A)$ ($\operatorname{b}(A)$, resp. $\operatorname{aco}(A)$).

Větička 2. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $A \subset X$.*

(a) *Je-li $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, pak A je absolutně konvexní, právě když je konvexní a symetrická.*
(b) $\operatorname{co}(A) = \{t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k; x_1, \ldots, x_k \in A, t_1, \ldots, t_k \geq 0, t_1 + \cdots + t_k = 1\}$.
(c) $\operatorname{b}(A) = \{\alpha x; x \in A, \alpha \in \mathbb{F}, |\alpha| \leq 1\}$.
(d) $\operatorname{aco}(A) = \operatorname{co}(\operatorname{b}(A))$.

Větička 3. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS a $U \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$. Pak platí:*

(i) *U je pohlcující.*
(ii) *Existuje $V \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ splňující $V + V \subset U$.*
(iii) *Existuje $V \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ otevřená a vyvážená splňující $V \subset U$.*
(iv) *Je-li X lokálně konvexní, existuje $V \in \mathcal{T}(\boldsymbol{o})$ otevřená a absolutně konvexní splňující $V \subset U$.*

Věta 4.

(1) *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS. Pak existuje $\mathcal{U}$, báze okolí $\boldsymbol{o}$ s vlastnostmi:*
  (i) *Prvky $\mathcal{U}$ jsou pohlcující, otevřené a vyvážené.*
  (ii) *Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.*
  Je-li X lokálně konvexní, lze $\mathcal{U}$ volit tak, aby jeho prvky byly navíc absolutně konvexní. Je-li X navíc Hausdorffův, platí také $\bigcap \mathcal{U} = \{\boldsymbol{o}\}$.
(2) *Obráceně, nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém podmnožin X s vlastnostmi:*
  (i) *Prvky $\mathcal{U}$ jsou pohlcující a vyvážené.*
  (ii) *Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.*
  (iii) *Pro každé $U, V \in \mathcal{U}$ existuje $W \in \mathcal{U}$ splňující $W \subset U \cap V$.*
  Pak existuje právě jedna topologie $\mathcal{T}$ na X taková, že $(X, \mathcal{T})$ je TVS a $\mathcal{U}$ je báze okolí $\boldsymbol{o}$. Jsou-li prvky $\mathcal{U}$ absolutně konvexní, je $\mathcal{T}$ lokálně konvexní. Pokud navíc $\bigcap \mathcal{U} = \{\boldsymbol{o}\}$, je $\mathcal{T}$ Hausdorffova.

Příklady 5.

(1) *Nechť T je Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ nechť označuje prostor spojitých funkcí na T. Pak systém*

$$\mathcal{U} = \left\{ \{f \in \mathcal{C}(T, \mathbb{F}); \max_{x \in K} |f(x)| < c\}; K \subset T \text{ kompaktní}, c > 0 \right\}$$

tvoří bázi okolí $\boldsymbol{o}$ v jisté topologii, s níž $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ tvoří HLCS. Jde o topologii stejnoměrné konvergence na kompaktech. Je-li T lokálně kompaktní, jde o topologii lokálně stejnoměrné konvergence.

(2) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $\mathscr{D}(\Omega)$ nechť označuje prostor testovacích funkcí na Ω. Pak systém*

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathscr{D}(\Omega) \text{ absolutně konvexní, pohlcující;} \\ \forall K \subset \Omega \text{ kompaktní} : U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \text{ je okolí nuly v } \mathscr{D}_K(\Omega)\}$$

tvoří bázi okolí $\boldsymbol{o}$ v jisté topologii, s níž $\mathscr{D}(\Omega)$ tvoří HLCS.