Výpočet determinantu

Metody výpočtu

- Pro matice řádu 1 je výpočet triviální z definice.
- Pro matice řádu 2 máme snadný vzoreček $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.
- Pro matice řádu 3 máme Sarusovo pravidlo.
- Pro matice obecného řádu lze použít následující metody:
  - Definice determinantu: V principu lze determinant počítat opakovaným použitím definice. Většinou to není vhodná metoda, protože je zdlouhavá a početně náročná: Například, počítáme-li determinant matice 6×6, aplikací definice úlohu převedeme na počítání determinantů 6 matic řádu 5 (a další aritmetické operace), další aplikací definice dostaneme $6 \cdot 5 = 30$ matic řádu 4, další aplikací pak $30 \cdot 4 = 120$ matic řádu 3. Pokud na ně použijeme Sarusovo pravidlo, determinant každé z nich se spočte pomocí součtů a rozdílů jistých 6 součinů. Dohromady dostaneme $120 \cdot 6 = 720$ součinů. Je zřejmé, že toto není efektivní metoda výpočtu.
  - Řádkové úpravy: Můžeme aplikovat Větu VI.10. Pomocí řádkových úprav můžeme matici zjednodušit a víme, jak tyto úpravy mění determinant.
  - Sloupcové úpravy: Můžeme aplikovat sloupcovou variantu Věty VI.10, matici zjednodušit pomocí sloupcových úprav, přitom víme, jak tyto úpravy mění determinant.
  - Determinant trojúhelníkové matice: Pokud je matice horní či dolní trojúhelníková, podle Věty VI.8 je determinant roven součinu prvků na diagonále. Toto lze kombinovat s řádkovými (či sloupcovými) úpravami – matici lze řádkovými úpravami převést na schodovitou; ta je horní trojúhelníková.
  - Rozvoj determinantu podle řádku či sloupce. Občas je vhodné použít Větu VI.14, zejména v případě, že v některém řádku či sloupci je velmi málo (například jen jeden) nenulových prvků.

– Věta VI.11: Pokud vidíme, že matice není regulární (například má nulový řádek nebo nulový sloupec, nebo má dva stejné řádky či dva stejné sloupce atp.), je determinant roven 0.

Řešení příkladu 16 ze supersemináře

První matice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 17 = 34.$$

Komentář k výpočtu:

- V prvním kroku jsme z posledního řádku vytknuli číslo 2. Tedy: Poslední řádek jsme vynásobili číslem $\frac{1}{2}$. Tím se nám hodnota determinantu také vynásobila $\frac{1}{2}$, tedy původní determinant je 2-násobek nového. Můžeme si to představit jako vytýkání.

- Ve druhém kroku jsme provedli postupně čtyři úpravy třetího druhu – k druhému řádku jsme přičetli (-2)-násobek prvního, ke třetímu řádku jsme přičetli (-3)-násobek prvního, ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-2)-násobek prvního, k pátému řádku jsme přičetli (-4)-násobek prvního.

  Při těchto úpravách se hodnota determinantu nemění. Děláme je postupně, ale můžeme to zapsat najednou, protože postupně měníme pouze druhý, třetí, čtvrtý a pátý řádek a první řádek se nemění.

- Ve třetím kroku jsme ke třetímu řádku přičetli dvojnásobek druhého. Tím se hodnota determinantu nezměnila.

- Nakonec jsme použili Větu VI.8 o determinantu trojúhelníkové matice.

Druhá matice

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -6 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \cdot (-1)^{5+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & -5 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -7 \\ 7 & 5 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & -9 & -11 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 2 & -8 & -7 \\ -9 & -11 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -9 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 2 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -9 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 2 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -36 \cdot ((-3) \cdot (-8) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-5) \cdot (-7) - 4 \cdot (-8) \cdot 0 \\ &\quad -(-5) \cdot 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-7) \cdot 1) = -36 \cdot (-24 + 8 - 10 - 21) \\ &= -36 \cdot (-47) = 1692. \end{aligned}$$

Komentář k výpočtu:

- V prvním kroku jsme provedli postupně tři úpravy třetího druhu – k druhému řádku jsme přičetli 1-násobek prvního, ke třetímu řádku jsme přičetli 2-násobek prvního, ke čtvrtému řádku jsme přičetli 1-násobek prvního. Tím se hodnota determinantu nezměnila.

  Nabízelo se ještě k pátému řádku přičíst 9-násobek prvního. Ale všimli jsme si velké shody čtvrtého a pátého řádku v nové matici, a tak jsme zvolili postup, který je (možná) početně jednodušší.

- Ve druhém kroku jsme od pátého řádku odečetli čtvrtý řádek. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- Ve třetím kroku jsme z pátého řádku vytkli 9.
- Ve čtvrtém kroku jsme k prvnímu řádku přičetli pátý řádek. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- V pátém kroku jsme použili definici determinantu, neboli rozvoj podle prvního sloupce. Protože v prvním sloupci je jen jeden nenulový prvek, zůstal jenom jeden ze sčítanců.
- V šestém kroku jsme od prvního řádku odečetli trojnásobek čtvrtého a od druhého řádku jsme odečetli třetí řádek. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- V sedmém kroku jsme od třetího řádku odečetli sedminásobek čtvrtého.
- V osmém kroku jsme použili definici determinantu, neboli rozvoj podle prvního sloupce. Protože v prvním sloupci je jen jeden nenulový prvek, zůstal jenom jeden ze sčítanců.
- V devátém kroku jsme od třetího řádku odečetli trojnásobek prvního.
- V desátém kroku jsme z třetího řádku vytknuli 4.
- Nakonec jsme použili Sarusovo pravidlo.
- Poznámky:
  - Sarusovo pravidlo šlo použít již po osmém kroku. Ale museli bychom více počítat.

– Po druhém kroku jsme mohli použít rozvoj podle posledního řádku. Tím bychom se rovnou dostali na výsledek kroku pátého.

Třetí matice – postup č.1 s použitím sloupcových úprav

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 10 & -1 & 1 & 7 & -1 \\ 11 & -9 & -5 & 6 & 1 \\ 12 & -9 & -1 & 5 & 3 \\ 12 & 0 & 1 & 10 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 11 & -1 \\ 10 & -10 & -4 & 2 & 1 \\ 9 & -12 & 2 & -7 & 3 \\ 13 & 1 & 0 & 14 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 & 11 \\ 10 & -10 & -4 & 2 \\ 9 & -12 & 2 & -7 \\ 13 & 1 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -10 & -2 & 2 \\ 9 & -12 & 1 & -7 \\ 13 & 1 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 22 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -10 & -2 & 2 \\ 16 & -12 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 22 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -10 & -2 \\ 16 & -12 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -22 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 16 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -22 \cdot (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 22 \cdot ((-2) \cdot 1 - (-2) \cdot 4) = 22 \cdot 6 = 132.$$

Komentář k výpočtu:

- V prvním kroku jsme od druhého sloupce odečetli první, od třetího sloupce odečetli čtvrtý a od pátého sloupce odečetli čtvrtý. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- Ve druhém kroku jsme od prvního sloupce odečetli pátý, od druhého sloupce též odečetli pátý, k třetímu sloupci přičetli pátý a od čtvrtého sloupce odečetli čtyřnásobek pátého. Tím se hodnota determinantu nezměnila.

- Ve třetím kroku jsme použili rozvoj podle prvního řádku.
- Ve čtvrtém kroku jsme z prvního řádku vytknuli 11 a z třetího sloupce vytknuli 2.
- V pátém kroku jsme od prvního sloupce odečetli pátý. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- V šestém kroku jsme použili rozvoj podle prvního řádku.
- V sedmém kroku jsme ke druhému sloupci přičetli první. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- V osmém kroku jsme použili rozvoj podle třetího řádku.
- Nakonec jsme použili vzorec pro determinant matice druhého řádu.
- Poznámka: Po šestém kroku jsme mohli použít Sarusovo pravidlo.

Jiný postup pro tentýž determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 12 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -9 & -10 & -5 & -4 \\ 0 & -9 & -8 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -9 & -10 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 44 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 44 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -132 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -132 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 15 & 16 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 132 \cdot (0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 16 + 0 \cdot 15 \cdot 0 - 16 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 15 \cdot 1)$$
$$= 132 \cdot (16 - 15) = 132.$$

Komentář k tomuto výpočtu:

- V prvním kroku jsme k prvnímu řádku přičetli druhý. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- Ve druhém kroku jsme z prvního řádku vytknuli 11.
- Ve třetím kroku jsme od druhého řádku odečetli 10-násobek prvního, od třetího řádku odečetli 11-násobek prvního, od čtvrtého řádku odečetli 12-násobek prvního a od pátého řádku odečetli 12-násobek prvního. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- Ve čtvrtém kroku jsme od čtvrtého řádku odečetli třetí. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- V pátém kroku jsme od třetího řádku odečetli 9-násobek druhého. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- V šestém kroku jsme ze třetího a čtvrtého řádku vytknuli 2.
- V sedmém kroku jsme od třetího řádku odečetli čtyřnásobek čvrtého a k pátému řádku příčetli čtvrtý řádek. Tím se hodnota determinantu nezměnila.
- V osmém kroku jsme z pátého řádku vytknuli -3.
- V devátém kroku jsme použili definici determinantu, neboli rozvoj podle prvního sloupce. V desátém kroku jsme tak učinili ještě jednou.
- Nakonec jsme použili Sarusovo pravidlo.