

**Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (D)**  
**ZS 2004-2005**

---

**Příklad 1 :** Spočtete limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100} + n^{99} - 1} - \sqrt{n^{100} + 2n^{99} + 1}} \quad (15 \text{ bodů})$$

**Příklad 2 :** Spočtete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + 2^x + 3^x + 4^x) \cdot \log(1 + x^2)}{x \log x} \quad (15 \text{ bodů})$$

**Příklad 3 :** Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtete derivaci funkce

$$f(x) = (x - [x]) \cdot x \quad [\dots] \text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

**Příklad 4 :** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \log(x^2 + 1). \quad (20 \text{ bodů})$$

**Příklad 5 :** (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice  $4 \sin^4 x + 4 \cos^2 x = 3$ .

(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice  $\frac{x+1}{x} > \frac{x}{x+1}$ .

(c) Načrtněte graf funkce  $f(x) = (x+7)^2(4-x^2)$ .

---

**Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (D)**  
**ZS 2004-2005**

---

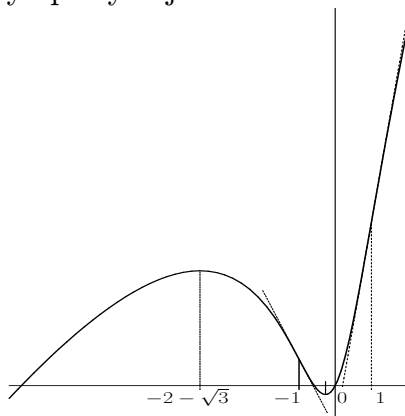
**Příklad 1:** -700

**Příklad 2:**  $4 \log 2$

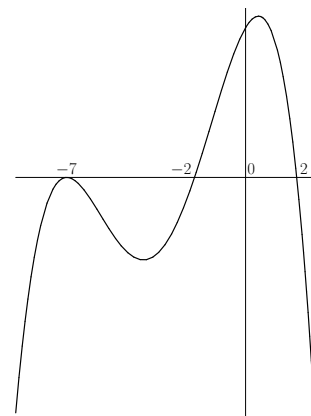
**Příklad 3:**  $D_f = \mathbf{R}$ ,  $f$  je spojitá ve všech bodech  $\mathbf{R} \setminus (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ , v bodech  $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$  je spojitá zprava, ale ne zleva. Pro  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$  je  $f'(x) = 2x - [x]$ , pro  $x \in \mathbf{Z}$  je  $f'_+(x) = x$ ,  $f'_-(0) = 1$ , pro  $x \in \mathbf{N}$  je  $f'_-(x) = -\infty$ , pro  $x \in \mathbf{Z}$ ,  $x < 0$  je  $f'_-(x) = +\infty$ .

**Příklad 4:**  $D_f = \mathbf{R}$ ,  $f$  je spojitá na  $\mathbf{R}$ , limita v  $+\infty$  je  $+\infty$ , limita v  $-\infty$  je  $-\infty$ .  $f$  je rostoucí na  $(-\infty, -2 - \sqrt{3})$  a na  $(-2 + \sqrt{3}, +\infty)$ , klesající na  $(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})$ , v bodě  $-2 - \sqrt{3}$  je lokální maximum, v bodě  $-2 + \sqrt{3}$  lokální minimum,  $H_f = \mathbf{R}$ .  $f$  je konkávní na  $(-\infty, -1)$  a na  $(1, +\infty)$ , konvexní na  $(-1, 1)$ , v bodech  $-1$  a  $1$  jsou inflexní body. Asymptoty nejsou.

Graf:



5(c):



**Příklad 5:** (a)  $\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$  (b)  $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$