

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2004-2005

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \right] \quad [\dots] \text{ znamená celou část} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log(\cos(\sin x))}{\log(1 - \sin^2(\sin x))} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^{\sqrt[3]{x^2}}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[5]{1 - \sqrt{x+1}}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

- (a) Najděte všechna reálná řešení rovnice $x^3 + 7x^2 - 2x - 6 = 0$ (jedno řešení je $x = 1$).
(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice $x + \frac{1}{x} > \frac{(x+1)^2}{x+2}$.
(c) Načrtněte graf funkce $f(x) = |(x-3)^2 - 4|$.
-

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2004-2005

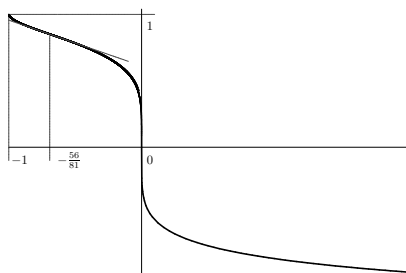
Příklad 1: 0

Příklad 2: $\frac{1}{2}$

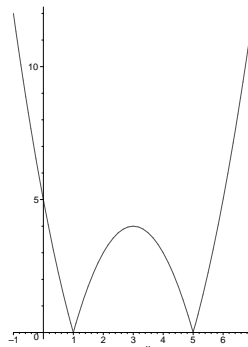
Příklad 3: $D_f = (-1, +\infty)$, f je spojitá na $(-1, +\infty)$. $f'(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\log(1 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{x})} \right)$ pro $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(0) = 1$.

Příklad 4: $D_f = \langle -1, +\infty \rangle$, f je spojitá na $\langle -1, +\infty \rangle$, $f(-1) = 1$, limita v $+\infty$ je $-\infty$. f je klesající na \mathbf{R} , maximum 1 v bodě -1 , minimum nemá, $H_f = (-\infty, 1)$, $f'_+(-1) = f'(0) = -\infty$. f je konvexní na $\langle -1, -\frac{56}{81} \rangle$ a na $\langle 0, +\infty \rangle$, konkávní na $\langle -\frac{56}{81}, 0 \rangle$, v bodě $-\frac{56}{81}$ je inflexní bod. Asymptoty neexistují.

Graf:



5(c):



Příklad 5: (a) $1, -4 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10}$. (b) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$