V.7 Lagrangeova věta o multiplikátorech

Věta 17 (Lagrangeova věta pro začátečníky). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$ a $M = \{[x, y] \in G \colon g(x, y) = 0\}$. Je-li $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M a*

$$\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}), \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})\right] \neq [0, 0],$$

pak existuje reálné číslo $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, že $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boldsymbol{o}$, neboli

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0. \end{aligned}$$

Věta 18 (Lagrangeova věta pro pokročilé). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(G)$, $m < n$ a*

$$M = \{\boldsymbol{x} \in G \colon g_1(\boldsymbol{x}) = 0, g_2(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Je-li bod $\boldsymbol{a} \in M$ bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k M a jsou-li vektory

$$\nabla g_1(\boldsymbol{a}), \nabla g_2(\boldsymbol{a}), \ldots, \nabla g_m(\boldsymbol{a})$$

lineárně nezávislé, pak existují reálná čísla λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tak, že

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) + \lambda_1 \nabla g_1(\boldsymbol{a}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}.$$

Poznámka. Pojem **lineárně nezávislých vektorů** bude definován později. Jeden vektor je lineárně nezávislý, je-li nenulový; dva vektory jsou lineárně nezávislé, není-li žádný z nich násobkem druhého.