II.4. Hlubší výsledky o limitách

Věta 9 (o limitě monotónní posloupnosti). *Každá monotónní posloupnost má limitu. Podrobněji:*

(i) *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající.*
  (a) *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.
  (b) *Není-li posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená, je* $\lim a_n = +\infty$.

(ii) *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.*
  (a) *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.
  (b) *Není-li posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, je* $\lim a_n = -\infty$.

Věta 10. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak existuje vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$, která je monotónní.*

Důsledek. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak existuje vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$, která má limitu (vlastní nebo nevlastní).*

Věta 11 (Bolzano-Weierstrass). *Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je omezená. Pak existuje vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$, která je konvergentní.*