I. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici

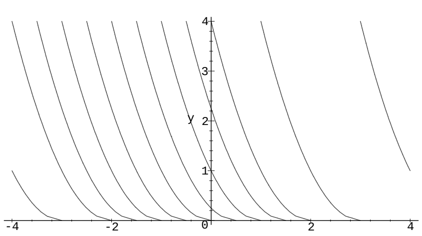
1. (a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ **2.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \leq 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ **4.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ **5.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y > 17\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| > x+y\}$ **7.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| = x-y\}$
8. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$ **9.** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y > 0, x+y = 2, z \leq 0\}$

Určete (a nakreslete) definiční obor a vrstevnice funkcí

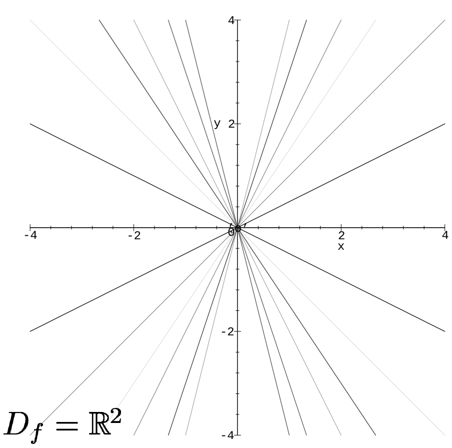
10. $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ **11.** $f(x,y) = \frac{y}{x}$ **12.** $f(x,y) = x^2 + y^2$ **13.** $f(x,y) = x^2 - y^2$
14. $f(x,y) = \sqrt{xy}$ **15.** $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **16.** $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
17. $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ **18.** $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)^2}$
19. $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ **20.** $f(x,y) = \mathrm{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$ **21.** $f(x,y) = |x| + y$

Výsledky a návody. **1.** (a) $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $H(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. (b) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset$, $H(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ (c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. (d) Ani otevřená, ani uzavřená, vnitřek $(-\infty, 0)$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$. **2.** Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$, hranice$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\ \&\ y \leq 0\ \&\ (x = 0 \vee y = 0)\}$. **3.** Otevřená, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **4.** Uzavřená, vnitřek $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **5.** Otevřená, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y = 17\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y \leq 17\}$ **6.** Otevřená, uzávěr $\{(x,y) \mid x + y \leq 0\}$, hranice $\{(x,y) \mid x + y = 0\}$. **7.** Uzavřená, vnitřek $\{(x,y) \mid x + y > 0\}$, hranice $\{(x,y) \mid x + y = 0\}$. **8.** Uzavřená, prázdný vnitřek. **9.** Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y = 2, z \leq 0\}$.

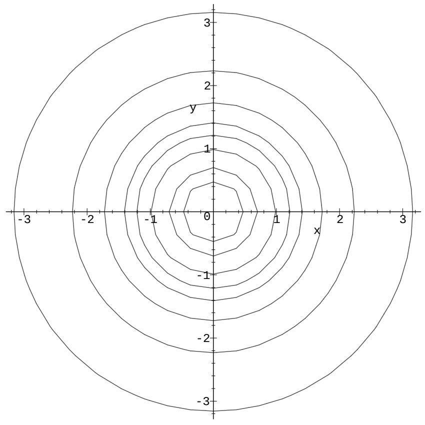
10. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$



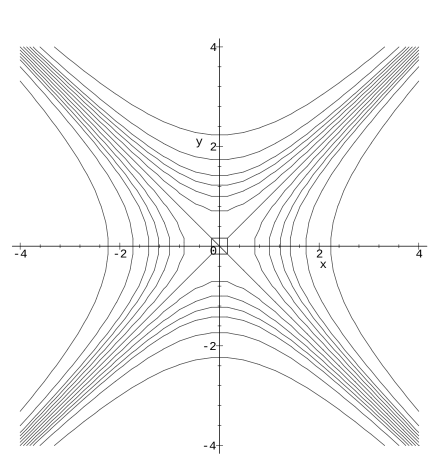
11. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$



12. $D_f = \mathbb{R}^2$

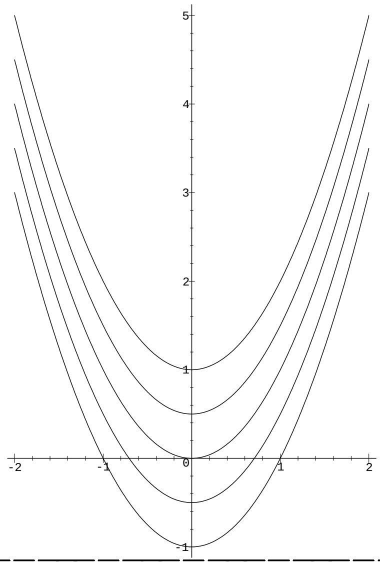


13. $D_f = \mathbb{R}^2$

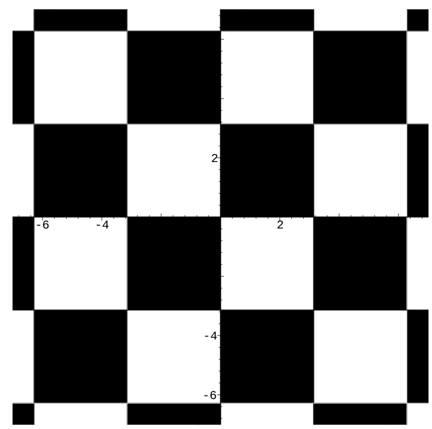


14. $D_f = \{(x,y) \mid (x \geq 0 \ \& \ y \geq 0) \vee (x \leq 0 \ \& \ y \leq 0)\}$, vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}$ pro $c > 0$ spolu s dvojicí os. **15.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **16.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **17.** $D_f = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. **18.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. **19.** $D_f = \{(x,y) \mid 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi$ pro nějaké $k = 0, 1, 2, \dots\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. **20.** $D_f = \mathbb{R}^2$, jsou tři vrstevnice - vnitřky černých čtverců, vnitřky bílých čtverců a hraniční přímky.

Ad **18.**



Ad **20.**



II. Spočtěte parciální derivace, určete totální diferenciál a rovnici tečné roviny ke grafu funkce v příslušných bodech

1. $x^m y^n$; a) $(0,0)$ b) $(1,1)$ **2.** e^{xy}; a) $(0,0)$ b) $(0,1)$ c) $(1,1)$
3. $xy + yz + zx$; a) $(0,0,0)$ b) $(0,0,5)$ c) $(1,2,3)$ **4.** $\sqrt{x^2+y^2}$; a) $(3,4)$ b) $(0,5)$
5. $\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$; a) $(0,1,1)$ b) $(3,4,5)$ **6.** $\left(\frac{x}{y}\right)^z$; a) $(1,1,0)$ b) $(1,1,1)$
7. $x^{\frac{y}{z}}$; a) $(1,0,1)$ b) $(1,1,1)$ c) $(1,2,2)$ **8.** x^{y^z}; a) $(1,1,1)$ b) $(1,1,-1)$ c) $(1,2,3)$

Výsledky a návody. **1.** (a) $Df(0,0)(h,k) = 0$, tečná rovina $z = 0$; (b) $Df(1,1)(h,k) = mh + nk$, tečná rovina $z - 1 = m(x-1) + n(y-1)$; **2.** (a) $Df(0,0)(h,k) = 0$, tečná rovina $z = 1$; (b) $Df(0,1)(h,k) = h$, tečná rovina $z = 1 + x$; (c) $Df(1,1)(h,k) = eh + ek$, tečná rovina $z - e = e(x-1) + e(y-1)$; **3.** (a) $Df(0,0,0)(h,k,l) = 0$, tečná nadrovina $w = 0$; (b) $Df(0,0,5)(h,k,l) = 5h + 5k$, tečná nadrovina $w = 5x + 5y$; (c) $Df(1,2,3)(h,k,l) = 5h + 4k + 3l$, tečná nadrovina $w - 11 = 5(x-1) + 4(y-2) + 3(z-3)$; **4.** (a) $Df(3,4)(h,k) = \frac{3}{5}h + \frac{4}{5}k$, tečná rovina $z - 5 = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$; (b) $Df(0,5)(h,k) = k$, tečná rovina $z = y$; **5.** (a) $Df(0,1,1)(h,k,l) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(k+l)$, tečná nadrovina $w - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(y-1) + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(z-1)$; (b) $Df(3,4,5)(h,k,l) = \frac{1}{4}h + \frac{4}{9}k + \frac{25}{36}l$, tečná nadrovina $w - 6 = \frac{1}{4}(x-3) + \frac{4}{9}(y-4) + \frac{25}{36}(z-5)$; **6.** (a) $Df(1,1,0)(h,k,l) = 0$, tečná nadrovina $w = 1$; (a) $Df(1,1,1)(h,k,l) = h - k$, tečná nadrovina $w - 1 = (x-1) - (y-1)$; **7.** (a) $Df(1,0,1)(h,k,l) = 0$, tečná nadrovina $w = 1$; (b) $Df(1,1,1)(h,k,l) = h$, tečná nadrovina $w = x$; (c) $Df(1,2,2)(h,k,l) = h$, tečná nadrovina $w = x$; **8.** (a) $Df(1,1,1)(h,k,l) = h$, tečná nadrovina $w = x$; (b) $Df(1,1,-1)(h,k,l) = h$, tečná nadrovina $w = x$; (c) $Df(1,2,3)(h,k,l) = 8h$, tečná nadrovina $w - 1 = 8(x-1)$;

III. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na M nabývá.

1. $f(x,y,z)=(x+y)^2+(x-y)^2+z; M=[-1;1]\times[-1;1]\times[-1;1]$;
2. $f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}, a>0, b>0; M=\{(x,y); x^2+y^2\leq 1\}$;
3. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z; M=\mathbb{R}^3$; **4.** $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}; M=\mathbb{R}^2$;
5. $f(x,y)=x^2-xy+y^2, \qquad M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; |x|+|y|\leq 1\}$
6. $f(x,y)=(x+y)e^{-2x-3y}; M=\{(x,y); x>0, y>0\}$
7. $f(x,y)=\left(x^2+5y^2\right)e^{-\left(3x^2+y^2\right)}; M=\mathbb{R}^2$;
8. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2; M=\{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\}; a>b>c>0$.
9. $z(x,y)=x^2+y^2$, $M=\{(x,y), x^2+4y^2=1\}$
10. $z(x,y)=x^2+12xy+2y^2$; $M=\{(x,y), 4x^2+y^2=1\}$
11. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

Výsledky a návody. **1.** max 5 v bodech $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, min -1 v bodě $(0,0,-1)$ **2.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ **3.** sup $+\infty$, min -14 v bodě $(-1,-2,3)$ **4.** min 0 v $(0,0)$, max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2+y^2=1$. **5.** max 1 v bodech $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$, min 0 v $(0,0)$ **6.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se **7.** max $\frac{5}{e}$ v bodech $(0,\pm1)$, min 0 v bodě $(0,0)$ **8.** max a^2 v bodech $(\pm a,0,0)$, min 0 v $(0,0,0)$ **9.** max 1 v bodech $(\pm1,0)$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $(0,\pm\frac{1}{2})$ **10.** max $\frac{17}{4}$ v bodech $(\frac{3}{10},\frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{10},-\frac{4}{5})$, min -2 v bodech $(\frac{2}{5},-\frac{3}{5})$, $(-\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ **11.** dno $4m\times4m$, výška $2m$

IV. V následujících úlohách zjistěte sup inf funkce f na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot f na M nabývá.

1. $f(x,y,z)=x-2y+2z$,
a) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1\}$, b) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0\}$
2. $f(x,y,z)=xyz$,
a) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1\}$, b) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0\}$
3. $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$, $M=\{(x,y,z); x+y+z=\frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0\}$
4. $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $M=\{(x,y,z); x+2y+3z=a, x>0, y>0\}$, kde $a>0$.
5. $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^p+\cdots+x_n^p$; $M=\{(x_1,\ldots,x_n); x_1+\cdots+x_n=a,\ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$; kde $a>0, p>0$. **6.** $f(x,y)=x+y$, $M=\{(x,y); x^3+y^3-2xy=0, x\geq0, y\geq0\}$
7. $f(x,y,z)=10z+x-y$, $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2\leq1, y+x\geq0\}$ **8.** $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $M=\{(x,y), \frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1\}$ **9.** $f(x,y)=y$, $M=\{(x,y), \left(x^2+y^2\right)^2=Kxy\}$, kde $K>0$

Výsledky a návody. **1.** a) max 3 v $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, min -3 v $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(\frac{2}{\sqrt{78}},-\frac{7}{\sqrt{78}},\frac{5}{\sqrt{78}})$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(-\frac{2}{\sqrt{78}},\frac{7}{\sqrt{78}},-\frac{5}{\sqrt{78}})$; **2.** a) max $\frac{1}{3\sqrt3}$ v bodech $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$, $(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$; min $-\frac{1}{3\sqrt3}$ v bodech $(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$, $(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$; b) max $\frac{1}{3\sqrt6}$ v bodech $(\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6})$, $(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6})$, $(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6})$; min $-\frac{1}{3\sqrt6}$ v bodech $(-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})$, $(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})$, $(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6})$; **3.** max $\frac{1}{8}$ v $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$, inf 0, nenabývá se **4.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6})$, inf $-\infty$ **5.** pro $p=1$ je f na M konstantní; pro $p>1$ je sup a^p, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\ldots,\frac{a}{n})$; pro $p\in(0,1)$ je inf a^p, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\ldots,\frac{a}{n})$; **6.** max 2 v $(1,1)$, min 0 v $(0,0)$ **7.** max $\sqrt{102}$ v $(\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{10}{\sqrt{102}})$; min $-\sqrt{102}$ v $(-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{10}{\sqrt{102}})$; **8.** max $\frac{\sqrt5}{2}$ v $(\frac{\sqrt5}{2},2\sqrt5)$; min $-\frac{\sqrt5}{2}$ v $(-\frac{\sqrt5}{2},-2\sqrt5)$; **9.** max $\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot15^{\frac{3}{4}}$ v $(\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15},\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot15^{\frac{3}{4}})$; min $-\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot15^{\frac{3}{4}}$ v $(-\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15},-\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot15^{\frac{3}{4}})$.

V. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = 50x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}}$, $M = \{(x,y,z); 80x + 12y + 10z = 24000, x > 0, y > 0, z > 0\}$
2. $f(x,y) = y$, $M = \{(x,y); (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0\}$
3. $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{(x,y); 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$
4. Do elipsy $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ vepište obdélník největšího obsahu.
5. Do elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1$ vepište kvádr největšího objemu.
6. Najděte bod na jednotkové sféře, pro který je součet duhých mocnin vzdáleností od bodů $(7,0,0)$, $(5,3,1)$, $(0,1,2)$ nejmenší.

Výsledky a návody. **1.** max $500\sqrt[5]{5^4 \cdot 3^3 \cdot 2^2}$ v bodě $(150, 500, 600)$, inf 0, nenabývá se **2.** max $\frac{1}{2}$ v $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ a $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; min $-\frac{1}{2}$ v $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ a $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ **3.** max $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$ v bodech $(\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}})$ a $(-\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}})$, min -1 v $(0,-1)$ **4.** obdélník o stranách $\sqrt{2}$ a $4\sqrt{2}$ **5.** kvádr o hranách $\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ **6.** bod $(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13})$

VI. Implicitní funkce

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2,0]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$;
b) napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.
2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1,-2,1]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x,y)$ v jistém okolí U bodu $[1,-2]$, pro kterou platí $z(1,-2) = 1$;
b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;
c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x,y)$ v bodě $[1,-2]$.
3. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0,1]$. Dokažte, že
a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.
4. Dokažte, že množina bodů $(x,y,z) \in \mathbb{R}$, které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

je v okolí bodu $(1,1,1)$ popsatelná jako graf funkce $f(x,y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1,1) = 1$. Určete totální diferenciál v bodě (1,1) a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

Výsledky a návody. **1.** tečna: $y = 0$ **2.** tečná rovina $z = \frac{7}{5}(y+2) + 1$ **3.** Spočtěte $f'(0)$ a ověřte, že $f'(0) > 0$. **4.** tečná rovina $z = -(x-1) - (y-1) + 1$

VII. Určete y' a y'' v bodech, v jejichž okolí je uvedenou rovnicí zadána diferencovatelná funkce $y = y(x)$

1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 \quad a \in \mathbb{R}$ **2.** $\log\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **3.** $y - \varepsilon \sin y = x \quad 0 < \varepsilon < 1$
4. $x^y = y^x$ **5.** $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Zjistěte, v okolí kterých bodů je následujícím předpisem zadána diferencovatelná funkce $z = z(x,y)$ a najděte její parciální derivace prvního a druhého řádu

6. $\frac{x}{z} = \log\frac{z}{y}$ **7.** $xyz = x + y + z$ **8.** $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$ $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$ (F je třídy C^2)
9. $F(xz, yz) = 0$ $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ (F je třídy C^2)
***10.** Nechť x_0 je jednonásobný kořen rovnice $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že kdykoli $|b_i - a_i| < \delta$ pro $i = 1, \ldots, n$, pak rovnice $x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ má v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen. Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial b_i}(a_1, \ldots, a_n)$. (Co se stane, bude-li kořen x_0 p-násobný?)

Výsledky a návody. **1.** $y' = \frac{y+x}{y-x}$, $(x,y) \neq (\frac{a}{\sqrt2}, \frac{a}{\sqrt2}), (\frac{-a}{\sqrt2}, \frac{-a}{\sqrt2})$ **2.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $(x,y) \neq (\sqrt2 e^{\frac{\pi}{4}}, \sqrt2 e^{\frac{\pi}{4}}), (-\sqrt2 e^{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt2 e^{\frac{\pi}{4}})$ **3.** $y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$ **4.** $y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{x\log y + y}{y \log x + x}$, $(x,y) \neq (e,e)$ **5.** $y' = \frac{y}{x}$ **6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$ s výjimkou bodů $(-\frac{y}{e}, y, \frac{y}{e})$ **7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xz}{xy-1}$ **8.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z-x)(z-y)\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1F\cdot\partial_2F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1F)^2\right) + 2\partial_2F\cdot(\partial_1F + 2x\partial_2F)\cdot(\partial_1F+2y\partial_2F)}{(\partial_1F + 2z\partial_2F)^3}$, $(\partial_1F + 2z\partial_2F) \neq 0$ **9.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{zy\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1F\cdot\partial_2F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1F)^2\right) + 2z^2(\partial_1F)^2}{(x\partial_1F + y\partial_2F)^3}$, $(x\partial_1F + y\partial_2F) \neq 0$ **10.** Označme levou stranu $P(x)$. Využijte toho, že fakt, že x_0 je jednonásobný kořen P znamená $P(x_0) = 0$ a $P'(x_0) \neq 0$. $\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{x_0^{n-i}}{P'(x_0)}$. (Pro sudé p analogie neplatí, pro liché p zkoumejte $\sqrt[p]{P(x)}$.)

VIII. Určete hodnost matic (v závislosti na parametru)

1. $\begin{pmatrix} 1&2&1&3\\ 2&4&5&1\\ 3&6&7&5\\ 4&8&3&7 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1&2&2&3&5\\ 6&15&12&25&42\\ 2&5&4&8&14\\ 1&-1&2&-4&-7 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} a&1&1&1\\ 1&a&1&a\\ 1&1&a&a^2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2(a-1)&(3a+1)&a\\ (1-a)&-2&-1\\ a&2a&a \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2(a-1)&(3a+1)&a&2a\\ (1-a)&-2&-1&2\\ a&2a&a&a+1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1&-1&0&-3\\ 7&-2&2&-10\\ 7&-1&1&-9\\ 2&0&-2&-4\\ 6&-1&2&-7 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ a&2&1&2&a\\ 5&6&7&1&3\\ 1&2&a&2&1\\ 1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$

najděte inverzní matice k následujícím maticím

8. $\begin{pmatrix} 1&2&-1\\ 2&3&0\\ 0&-1&1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1&0&-1\\ -1&1&0\\ 2&1&3 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1&2&-3&1\\ 2&3&-1&2\\ 7&-1&4&3\\ 1&1&-2&-1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1&2&-1&1\\ 1&0&0&-1\\ 0&1&1&0\\ 1&2&0&0 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. **1.** 3 **2.** 3 **3.** 3 pro $a \neq 1$, 1 pro $a = 1$ **4.** 3 pro $a \neq 0, -1, 2$, jinak 2 **5.** 3 pro $a \neq -1$, 2 pro $a = -1$ **6.** 3 **7.** hodnost 4 pro $a \neq 1$, pro $a = 1$ hodnost 3 **8.** $\begin{pmatrix} 3&-1&3\\ -2&1&-2\\ -2&1&-1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1/2&-1/6&1/6\\ 1/2&5/6&1/6\\ -1/2&-1/6&1/6 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 0&-1/21&5/42&11/42\\ -1/2&23/42&-5/42&5/21\\ -1/2&13/42&-1/42&1/21\\ 1/2&-5/42&1/21&-25/42 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 2&2&2&-3\\ -1&-1&-1&2\\ 1&1&2&-2\\ 2&1&2&-3 \end{pmatrix}$

IX. Spočtěte determinanty

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

najděte řešení soustav lineárních rovnic

8. $\begin{aligned} x+2y-z&=1 \\ 2x+3y&=1 \\ -y+z&=1 \end{aligned}$ **9.** $\begin{aligned} x-z&=-2 \\ -x+y&=1 \\ 2x+y+3z&=13 \end{aligned}$ **10.** $\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+x_4&=-5 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4&=0 \\ 7x_1-x_2+4x_3-3x_4&=15 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4&=-3 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4&=2 \\ x_1-x_4&=-1 \\ x_2+x_3&=0 \\ x_1+2x_2&=-1 \end{aligned}$ **12.** $\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3+3x_4&=5 \\ 6x_1+15x_2+12x_3+25x_4&=42 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+8x_4&=14 \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4&=-7 \end{aligned}$

Výsledky a návody. **1.** determinant neexistuje, matice není čtvercová. **2.** 1 **3.** 6 **4.** -84 **5.** 1 **6.** 0 **7.** 29400000 **8.** $x=5$, $y=-3$, $z=-2$ **9.** $x=1$, $y=2$, $z=3$ **10.** $(1,0,2,0)$ **11.** $(5,-3,3,6)$ **12.** nekonečně mnoho řešení tvaru $(-3-2t,4,t,0)$, $t\in\mathbb{R}$

X. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$ **5.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **7.** $\sum_{k=1}^{\infty}\sin k$ **8.** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$ **9.** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ **10.** $\sum_{k=1}^{\infty}k^{\ln x}$, $x\in\mathbb{R}$

11. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x\in\mathbb{R}$ **13.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k^2}}{2^k}$, $x\in\mathbb{R}$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$

Výsledky a návody. **1.** Diverguje. **2.** Konverguje neabsolutně. **3.** Konverguje absolutně. **4.** Konverguje absolutně. **5.** Konverguje absolutně. **6.** Konverguje absolutně. **7.** Diverguje. **8.** Konverguje neabsolutně. **9.** Konverguje neabsolutně. **10.** Pro $0<x<\frac{1}{e}$ konverguje absolutně, jinak diverguje (pro $x\le 0$ nemá smysl). **11.** Pro $\alpha>\frac{1}{2}$ konverguje absolutně, jinak diverguje. **12.** Konverguje absolutně pro $x\neq\pm1$, diverguje pro $x=\pm1$. **13.** Konverguje absolutně pro $|x|\le 1$, jinak diverguje. **14.** Konverguje neabsolutně.

XI. Vyšetřete konvergenci následujících řad

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^7}{2^k+3^k}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+11}-\sqrt{k+2}\right)$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}-1\right)$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}k^4x^n$, $x\in\mathbb{R}$ **6.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ **7.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$ **8.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1}$ **9.** $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)\frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$

Výsledky a návody. **1.** Konverguje absolutně. **2.** Konverguje absolutně. **3.** Konverguje (neabsolutně). **4.** Konverguje. **5.** Konverguje absolutně pro $|x|<1$, diverguje pro $|x|\ge 1$. **6.** Konverguje absolutně pro $|x|<1$, diverguje pro $|x|>1$, pro $x=1$ konverguje neabsolutně, pro $x=-1$ diverguje. **7.** Konverguje absolutně pro $|x|\le 1$, diverguje pro $|x|>1$. **8.** Konverguje absolutně pro $|x|<1$, diverguje pro $|x|>1$, konverguje neabsolutně pro $|x|=1$. **9.** Diverguje.

XII. Nalezněte primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3+2x+\frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x+16e^{8x}-\frac{1}{x}+3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \log x\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a,b\in\mathbb{R}$
16. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. **1.** $\frac{1}{4}x^4+x^2+17\log|x|+C$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x+2e^{8x}-\log|x|+3\sin x+C$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $\frac{1}{8}\sin^8 x+C$ na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ na $\mathbb{R}$ **5.** $-\log|\cos x|+C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **6.** $\log|\sin x|+C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **7.** $\operatorname{tg} x-x+C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **8.** $-\operatorname{cotg} x-x+C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.** $\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **10.** $-\log|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|+C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **11.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$ na $\mathbb{R}$ **12.** $(x-1)e^x+C$ na $\mathbb{R}$ **13.** $x\log x-x+C$ na $(0,\infty)$ **14.** $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **15.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx+b\sin bx)+C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2\neq 0$; $x+C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **16.** $\frac{1}{4}|x|x^3+C$ na $\mathbb{R}$ **17.** $F(x)+C$ na $\mathbb{R}$, kde

$$F(x)=\begin{cases} 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[-\infty,-x_2]\\ -\pi(x+x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[-x_2,-x_1]\\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1]\\ \pi(x-x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[x_1,x_2]\\ 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty]\end{cases}\quad \text{a}\quad \begin{aligned} x_1&=\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}\\ x_2&=\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}\end{aligned}$$

XIII. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int\frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int\frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int\frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
6. $\int\frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x\cdot\sin^3 x}$ **8.** $\int\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **10.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$
11. $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **12.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ **13.** $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$
15. $\int\log^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.*** V závislosti na parametru $\alpha>0$ vypočtěte: (a) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}$ (b) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha\cos x)^2}$
17.* Spočtěte: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$ (pracné) **18.*** Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c\in\mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$?

Výsledky a návody. **1.** $\log(x^2+x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **2.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right)-4\log|x-1|$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **3.** $\left(\sum_1^8\frac{1}{2k}x^{2k}\right)-2\log|x-1|+3\log|x+1|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **4.** $x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$ **5.** $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **6.** $\log(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **7.** $\log|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\sin^2 x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ **8.** $\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right|+\sin 2x\right)$, $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pro $x=\frac{1}{2}\pi+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ je funkce dodefinována 0 **9.** $6\left(\frac{1}{9}u^{(3/2)}-\frac{1}{8}u^{(4/3)}+\frac{1}{7}u^{(7/6)}-\frac{1}{6}u+\frac{1}{5}u^{(5/6)}-\frac{1}{4}u^{(2/3)}\right)$, kde $u=x+1$, $x\in(-1,+\infty)$ **10.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,1)$ **11.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, kde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **12.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ **13.** $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})$ nebo $x\in(1+\sqrt{2},+\infty)$ **14.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt{2}}$, kde $t=\sqrt{x^2+2x+4}-x$, $x\in\mathbb{R}$ **15.** $x\log^2 x-2x\log x+2x$, $x\in(0,+\infty)$ **16.** (a) Pro $0<\alpha<1$: $F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$, $x\neq(2n+1)\pi$, $F((2n+1)\pi)=\lim\limits_{x\to(2n+1)\pi}F(x)$ Pro $\alpha>1$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right|$, $x\in(-\arccos(-\frac{1}{\alpha}),\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+$

$2k\pi$ nebo $x \in (\arccos(-\frac{1}{\alpha}), 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$, přičemž v bodě $(2k+1)\pi$ je funkce F vždy dodefinována 0 Pro $\alpha = 1$: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (b) Pro $0 < \alpha < 1$: $G(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(F(x) - \frac{\alpha\sin x}{1+\alpha\cos x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Pro $\alpha = 1$: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $\alpha > 1$: $G(x) = -(\alpha^2-1)^{-\frac{3}{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right| - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha-1)^2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right)$, $x \in (-\arccos(-\frac{1}{\alpha}), \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$, nebo $x \in (\arccos(-\frac{1}{\alpha}), 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$ **17.** $\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3}) + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1) + \frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ **18.** $a + 2b + 3c = 0$