I. Nerovnosti, indukce – opakování

1. Řešte následující nerovnosti v $\mathbb{R}$: $\dfrac{x-2}{2x-8} \geq 1$, $\quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$, $\quad \dfrac{x+2}{x+3} > \dfrac{2x+3}{x+6}$.

2. Nakreslete graf funkce: $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

3. Dokažte následující formulky:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

4. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

5. Dokažte pro a, $b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|$, $\quad ||a|-|b|| \leq |a-b|$.

6. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$ platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

7. Řešte rovnice: $\sin 2x = \sin x$, $\quad 2\sin x + \cos x = 1$, $\quad \log(x^2+1) = 2\log(3-x)$.

II. Logika a suprema

1. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

(1) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$

(2) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\,(x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$

(3) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\,(x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$

2. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů:

(i) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se:„Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně a tak se zeptáte obyvatele B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal,že mezi námi je jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(ii) Dejme tomu, že A řekne: „Buď já jsem padouch nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iii) Dejme tomu, že A řekne: „Já jsem padouch, ale B ne.“ Co jsou A a B?

(iv) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se někdo zeptá C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co C odpoví?

3. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

(i) $A = \{p/(p+q);\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$,

(ii) $B = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,

(iii) $C = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$,

(iv) $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$,

(v) $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ i \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

***4.** Sečtěte: $\sin x + \cdots + \sin nx$.

III. Spočtěte následující limity posloupností

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right)$ **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$ **10.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a \geq 0)$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ **14.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **15.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$ **16.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

Výsledky a návody. **1.** 0 **2.** 2 **3.** 2 **4.** 0 **5.** 0 **6.** Nemá limitu. **7.** 0 **8.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{1}{2}$ **10.** $\frac{1}{6}$ **11.** $\frac{1}{4}$ **12.** 1 pro $a > 0$, 0 pro $a = 0$ **13.** 1 **14.** 1 **15.** 0 **16.** 0

IV. Spočtěte limity posloupností

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n}$, $(A, B, C > 0)$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}[kx]}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ **5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$

9. Pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$? Totéž pro $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$.

Výsledky a návody. **1.** $\max(A, B, C)$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** $+\infty$ **4.** 1 **5.** 2 **6.** 0 **7.** 2 (dokažte, že a_n je rostoucí a omezená, a tedy má limitu, a pak, že limita musí být 2) **8.** 1 (dokažte, že posloupnost lichých i posloupnost sudých členů jsou monotónní a omezené, a že obě musí mít limitu 1) **9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$, $x = k\pi$, jinak limita neexistuje, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx = 1$, $x = 2k\pi$, jinak limita neexistuje. (Použijte, že $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin(n + 2)x - \sin nx) = 0$, existuje-li limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$.)

V. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$ **8.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$ **9.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ **10.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\ln x}$, $x \in \mathbb{R}$

11. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **12.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x \in \mathbb{R}$ **13.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}$, $x \in \mathbb{R}$ **14.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$

Výsledky a návody. **1.** Diverguje. **2.** Konverguje neabsolutně. **3.** Konverguje absolutně. **4.** Konverguje absolutně. **5.** Konverguje absolutně. **6.** Konverguje absolutně. **7.** Diverguje. **8.** Konverguje neabsolutně. **9.** Konverguje neabsolutně. **10.** Pro $0 < x < \frac{1}{e}$ konverguje absolutně, jinak diverguje (pro $x \leq 0$ nemá smysl). **11.** Pro $\alpha > \frac{1}{2}$ konverguje absolutně, jinak diverguje. **12.** Konverguje absolutně pro $x \neq \pm 1$, diverguje pro $x = \pm 1$. **13.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, jinak diverguje. **14.** Konverguje neabsolutně.

VI. Vyšetřete konvergenci následujících řad

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k+3^k}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+11} - \sqrt{k+2}\right)$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1\right)$

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^4 x^n$, $x \in \mathbb{R}$ **6.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi)\frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$

Výsledky a návody. **1.** Konverguje absolutně. **2.** Konverguje absolutně. **3.** Konverguje (neabsolutně). **4.** Konverguje. **5.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| \geq 1$. **6.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, pro $x = 1$ konverguje neabsolutně, pro $x = -1$ diverguje. **7.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, diverguje pro $|x| > 1$. **8.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, konverguje neabsolutně pro $|x| = 1$. **9.** Diverguje.

VII. Spočtěte limity nebo dokažte, že neexistují

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ **5.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ **7.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ **9.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $(m, n \in \mathbb{N})$

13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, $(n \in \mathbb{N})$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ **15.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $(m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R})$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $(m, n \in \mathbb{N})$ **17.** $\lim\limits_{x\to 1} ([x] - x)$ **18.** $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$ **19.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **21.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(\cos \alpha x)}{\log(\cos \beta x)}$

Výsledky a návody. **1.** 6 **2.** $-\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 1 **5.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **6.** 2 **7.** $\frac{\alpha}{\beta}$, pokud $\beta \neq 0$. **8.** -1 **9.** -3 **10.** $\frac{3}{2}$ **11.** $\frac{112}{27}$ **12.** $\frac{1}{2}mn(n-m)$ **13.** $\frac{1}{2}n(n+1)$ **14.** $\frac{1}{n}$ **15.** $\frac{an-bm}{mn}$ **16.** $\frac{m}{n}$ **17.** Limita neexistuje (zleva 1, zprava 0). **18.** 1 **19.** $\frac{4}{3}$ **20.** $-\frac{1}{12}$ **21.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$

Test číslo 1

1. Spočtěte limitu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7n}-\sqrt[3]{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^2+6n}-\sqrt[3]{n^2+n}}$. (25 bodů)

Řešení. Výraz, jehož limitu počítáme, si upravíme:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{n^2+7n}-\sqrt[3]{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^2+6n}-\sqrt[3]{n^2+n}} &= \frac{\sqrt[3]{n^2+7n}-\sqrt[3]{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^2+6n}-\sqrt[3]{n^2+n}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n^2+7n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+7n}\cdot\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n^2+7n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+7n}\cdot\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2} \\
&\quad\cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n^2+6n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+6n}\cdot\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n^2+6n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+6n}\cdot\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2} \\
&= \frac{n^2+7n-(n^2+n)}{n^2+6n-(n^2+n)} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n^2+6n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+6n}\cdot\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n^2+7n}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+7n}\cdot\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n^2+n}\right)^2} \\
&= \frac{6n}{5n} \cdot \frac{n^{\frac{4}{3}}\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{6}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{6}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2\right)}{n^{\frac{4}{3}}\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{7}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{7}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2\right)} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{6}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{6}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{7}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{7}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2},
\end{aligned}$$

což má zřejmě limitu $\frac{6}{5}$.

2. Spočtěte limitu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n\cdot n+3^n\cdot n^7}$. (25 bodů)

Řešení. Všimněme si, že platí nerovnosti

$$\sqrt[n]{3^n\cdot n^7} \leq \sqrt[n]{2^n\cdot n+3^n\cdot n^7} \leq \sqrt[n]{2\cdot 3^n\cdot n^7}.$$

Přitom levá strana se rovná $3\sqrt[n]{n^7}$, což má limitu 3, neboť $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, a tedy i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^7} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^7=1$. Pravá strana se rovná $3\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^7}$, což má rovněž limitu 3 (použijme navíc, že $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$). A tedy, dle věty o dvou policajtech, má i posloupnost ze zadání limitu 3.

3. Zjistěte, zda konverguje řada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^{100}}{2^k}$. (25 bodů)

Řešení. Použijme Cauchyho odmocninové kritérium:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|(-1)^k\frac{k^{100}}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^{100}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

a tedy naše řada konverguje dokonce absolutně.

4. Zjistěte, zda konverguje řada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k^4+2k^3}-\sqrt{k^4+k}}$. (25 bodů)

Řešení. Upravme si k-tý člen řady:

$$a_k=\frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k^4+2k^3}-\sqrt{k^4+k}}=\frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k^4+2k^3}-\sqrt{k^4+k}}\cdot\frac{\sqrt{k^2+k}+k}{\sqrt{k^2+k}+k}\cdot\frac{\sqrt{k^4+2k^3}+\sqrt{k^4+k}}{\sqrt{k^4+2k^3}+\sqrt{k^4+k}}$$
$$=\frac{k^2+k-k^2}{k^4+2k^3-(k^4+k)}\cdot\frac{\sqrt{k^4+2k^3}+\sqrt{k^4+k}}{\sqrt{k^2+k}+k}=\frac{k}{2k^3-k}\cdot\frac{k^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}}+\sqrt{1+\frac{1}{k^3}}\right)}{k\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1\right)}$$
$$=\frac{k}{2k^2-1}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{k}}+\sqrt{1+\frac{1}{k^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2-\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{k}}+\sqrt{1+\frac{1}{k^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}.$$

Odtud vidíme, že všechny členy řady jsou kladné, a navíc

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}>0,$$

a tedy, podle srovnávacího kritéria, řada diverguje (protože $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverguje).

VIII. Spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log\cos x}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ **4.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$ **7.** $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$ **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x^{\operatorname{tg}2x}$ **10.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ **11.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$ **12.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ **14.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\cdot x^k$ **15.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$,

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ **17.** Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby platilo $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

Výsledky a návody. **1.** $-\frac{1}{2}$ **2.** 0 **3.** e^3 **4.** e **5.** e **6.** 1 **7.** $\frac{1}{5}$ **8.** 0 **9.** $\frac{3}{2}$ **10.** $\frac{1}{e}$ **11.** limita neexistuje. **12.** $+\infty$ **13.** $\frac{2}{3}$ **14.** $3\log 2$ **15.** 0 pro $k>1$, $\frac{1}{\pi}$ pro $k=1$, $+\infty$ pro $k<1$ liché, neexistuje pro $k<1$ sudé. **16.** 0 **17.** $\frac{1}{2}$ **18.** $a=-1, b=\frac{1}{2}$

IX. Spočtěte limity

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$ **3.** $\lim\limits_{x\to1-}\frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$ **4.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi\cdot2^x)}{\log\cos(\pi\cdot4^x)}$ **5.** $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos x)^x-\sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$ **7.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x-1}+\sqrt[3]{\cos\pi x}}{\log^2 x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to0+}(e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg}x)^2}{x^\alpha}}$

Výsledky a návody. **1.** 1 **2.** 1 **3.** 0 pro $\alpha<\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ pro $\alpha=\frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $\alpha>\frac{1}{2}$ **4.** $-\frac{1}{8}$ **5.** 2 **6.** -1 **7.** $1+\frac{\pi^2}{6}$ **8.** 1 pro $\alpha<2$, 0 pro $\alpha\geq2$

X. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkcí

1. x^x **2.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **3.** $(\sin x)^{\cos x}$ **4.** $\arcsin(\sin x)$, **5.** $\log\arccos x$

6. $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ **7.** $\operatorname{arctg}e^x-\log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$ **8.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$

9. $(\operatorname{arctg}x)^{\arcsin x}$ **10.** $f(x)=e^{\frac{1}{\ln|x|}}$

11. Spočtěte limity a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$, $(a>0)$, b) $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

Test číslo 2

1. Spočtěte limitu $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$. (40 bodů)

Řešení. Nejprve si uvědomme, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+2)-x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 1.$$

Dále si všimněme, že výraz $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ na nějakém okolí $+\infty$ nenabývá hodnoty 1. Kdyby totiž $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$, pak po umocnění dostaneme $2x-2\sqrt{x^2-1} = 2x+2-2\sqrt{x^2+2x}$, tedy $\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{x^2-1}+1$. Znovu umocníme a dostaneme $x^2+2x = x^2-1+2\sqrt{x^2-1}+1$, čili $x = \sqrt{x^2-1}$, tedy $x^2 = x^2-1$, což nenastane dokonce nikdy.
Proto můžeme použít větu o limitě složené funkce spolu se vzorečkem $\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$, a z toho dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\right)}{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}-1} = 1,$$

a tedy nám stačí vypočítat limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}.$$

K tomuto účelu si provedeme několik úprav.

$$\frac{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} - (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{2}$$
$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} - (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x} - (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left((\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}) + (\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\right).$$

Nyní si vzpomeňme, že $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$, a tedy i naše limita vyjde 0.

2. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci (včetně jednostranné spojitosti a jednostranných derivací) funkce $f(x) = |x^2 - 1| + [x]$. (30 bodů)

Řešení. Pišme $f(x) = g(x) + h(x)$, kde $g(x) = |x^2 - 1|$ a $h(x) = [x]$. Funkce g je spojitá na celém $\mathbb{R}$ (ze spojitosti základních funkcí a z věty o spojitosti a operacích a věty o spojitosti složené funkce). Funkce h je rovna k na intervalu $[k, k+1)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a tedy je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pokud $x \in \mathbb{Z}$, pak h je v bodě x spojitá zprava, ale ne zleva. (Je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $\lim_{y \to x+} [y] = x = [x]$ a $\lim_{y \to x-} [y] = x - 1 \neq [x]$.)
Tedy z věty o spojitosti součtu (a rozdílu) dostáváme, že f je spojitá v x pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, a v každém $x \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava a nikoli zleva.
Nyní se věnujme derivaci. Nejprve zderivujme g. Protože zřejmě $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$ kdykoli $x \neq 0$, máme z věty o derivaci složené funkce $g'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot 2x$, pokud $x \neq \pm 1$. V bodech ± 1 existují jednostranné derivace, které lze spočítat jako limity g', protože g je spojitá. Tedy

$$
\begin{aligned}
g'_+(1) &= \lim_{x \to 1+} g'(x) = 2, & g'_-(1) &= \lim_{x \to 1-} g'(x) = -2 \\
g'_+(-1) &= \lim_{x \to -1+} g'(x) = -2, & g'_-(-1) &= \lim_{x \to -1-} g'(x) = 2.
\end{aligned}
$$

Dále zderivujme h. Pokud $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pak h je na okolí x konstantní, a tedy $h'(x) = 0$. Pokud $x \in \mathbb{Z}$, pak $h'_+(x) = 0$, protože h je spojitá v x zprava, a tak $h'_+(x) = \lim_{x \to x+} h'(x) = 0$. V bodě x zleva funkce h není spojitá, a proto nemá vlastní derivaci. Z definice derivace lze zjistit, že $h'_-(x) = +\infty$.
Nyní použijme větu o derivaci součtu a shrňme výsledky:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot 2x && x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\
f'_+(x) &= \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot 2x && x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \\
f'_+(1) &= 2 \\
f'_+(-1) &= -2 \\
f'_-(x) &= +\infty && x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

3. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) = \sin(\cos(\sin(\cos x)))$ (30 bodů)
Řešení. Funkce sin a cos jsou definované a spojité na celém $\mathbb{R}$, a tak podle věty o spojitosti složené funkce je i f spojitá na $\mathbb{R}$. Navíc sin a cos mají v každém bodě vlastní derivaci, a tak podle věty o derivaci složené funkce platí

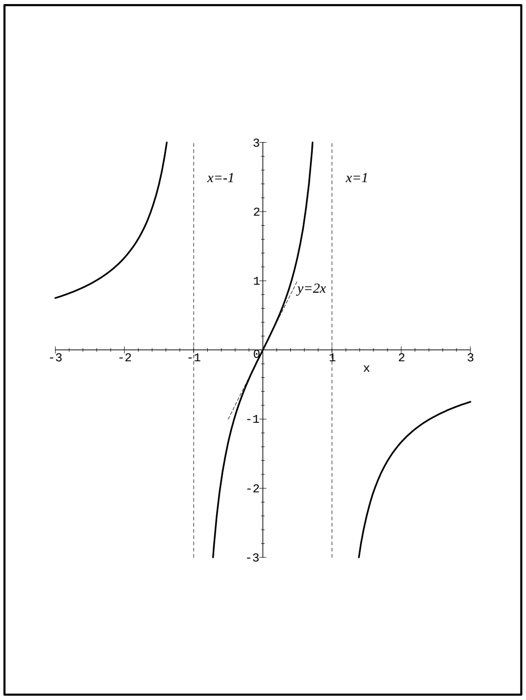
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(\cos(\sin(\cos x))) \cdot (-\sin(\sin(\cos x))) \cdot \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) \\
&= \cos(\cos(\sin(\cos x))) \cdot \sin(\sin(\cos x)) \cdot \cos(\cos x) \cdot \sin x.
\end{aligned}
$$

XI. Příklady na průběh funkcí

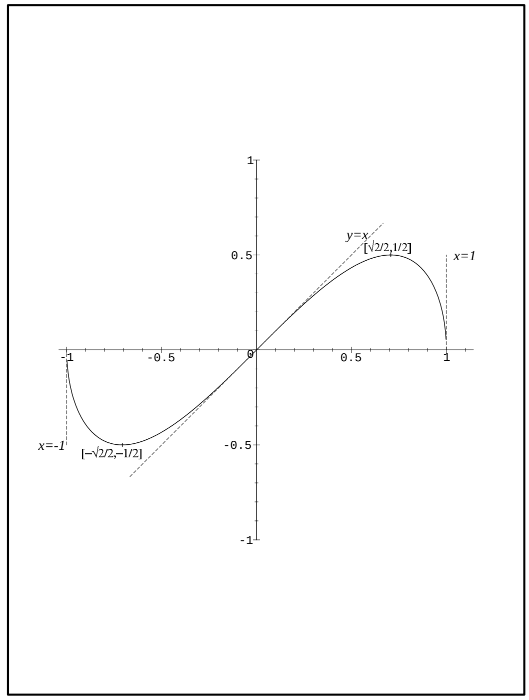
1. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ **2.** $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ **3.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ **4.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$ **6.** $f(x) = \frac{x^4+8}{x^3+1}$ **7.** $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$ **8.** $f(x) = \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$ **10.** $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ **11.** $f(x) = |\sin x| + \cos 2x$
12. $f(x) = \exp(-x^2 + 3x - 7)$ **13.** $f(x) = \arcsin(\cos^2 x)$

VÝSLEDKY A NÁVODY.

1.



2.



3.