I. Určete (a nakreslete) definiční obor a vrstevnice funkcí

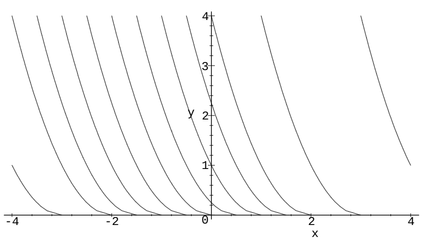
1. $f(x,y)=x+\sqrt{y}$ **2.** $f(x,y)=\frac{y}{x}$ **3.** $f(x,y)=x^2+y^2$ **4.** $f(x,y)=x^2-y^2$
5. $f(x,y)=\sqrt{xy}$ **6.** $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ **7.** $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
8. $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ **9.** $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$
10. $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ **11.** $f(x,y)=\operatorname{sgn}(\sin x\cdot\sin y)$ **12.** $f(x,y)=|x|+y$

Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici

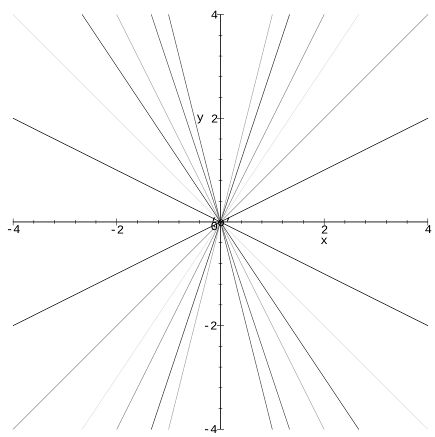
13. (a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ **14.** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,\,y\le 0\}$
15. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$ **16.** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\ge 1\}$ **17.** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+e^y>17\}$
18. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2+2xy=5\}$ **19.** $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x\ge 0, y>0, x+y=2, z\le 0\}$

Výsledky a návody.

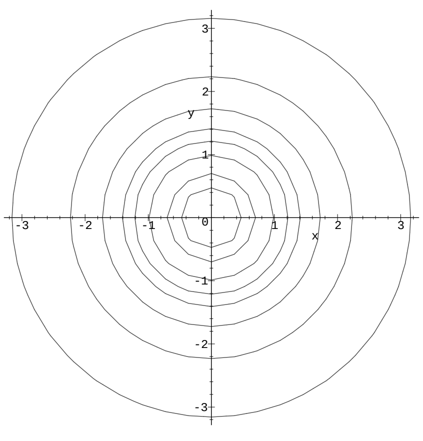
1. $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\ge 0\}$



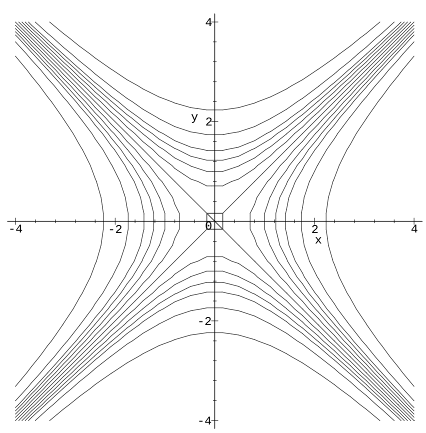
2. $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\ne 0\}$



3. $D_f=\mathbb{R}^2$

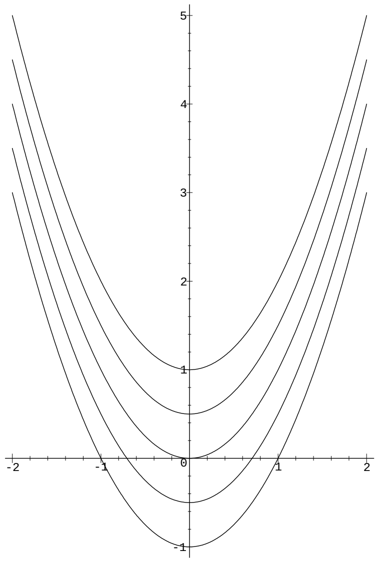


4. $D_f=\mathbb{R}^2$

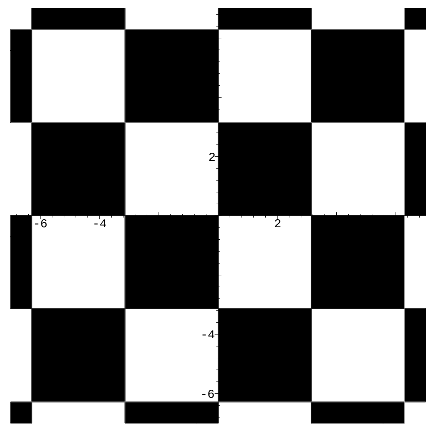


5. $D_f = \{(x,y) \mid (x \geq 0 \;\&\; y \geq 0) \vee (x \leq 0 \;\&\; y \leq 0)\}$, vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}$ pro $c > 0$ spolu s dvojicí os. **6.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **7.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **8.** $D_f = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. **9.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. **10.** $D_f = \{(x,y) \mid 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi$ pro nějaké $k = 0, 1, 2, \dots\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. **11.** $D_f = \mathbb{R}^2$, jsou tři vrstevnice - vnitřky černých čtverců, vnitřky bílých čtverců a hraniční přímky.

Ad **9.**



Ad **11.**



12. (a) $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $H(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. (b) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{int} \mathbb{N} = \emptyset$, $H(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ (c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. **13.** Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$, hranice$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \;\&\; y \leq 0 \;\&\; (x = 0 \vee y = 0)\}$. **14.** Otevřená, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **15.** Uzavřená, vnitřek $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **16.** Otevřená, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y = 17\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y \leq 17\}$ **17.** Uzavřená, prázdný vnitřek. **18.** Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.

- -

II. Spojitost, limity a parciální derivace

1. Určete uzávěr, hranici a vnitřek množiny $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| - x - y > 0\}$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **3.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ **4.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ **5.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ **7.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ **8.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

9. $\sqrt{x^2+y^2}$ **10.** $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ **11.** $|x| \cdot |y|$ **12.** $\sqrt[3]{xy}$ **13.** $|y - \sin x|$ **14.** $|\sin y - \sin x|$

15. $\sqrt[3]{x+y^2}$ **16.** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y} \cdot \ln(x^2+y^2)$, $f(0,0) = 0$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\operatorname{int} M = M$, $\overline{M} = \{(x,y) \mid x+y \le 0\}$, $H(M) = \{(x,y) \mid x+y=0\}$ **2.** 2 **3.** 0 **4.** 0 **5.** Neexistuje. **6.** 1 **7.** Neexistuje. **8.** 1 **9.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pokud $(x,y) \neq (0,0)$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistují. **10.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}}$, pokud $y \neq -x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$ neexistují pro $x \neq 0$. **11.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **12.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **13.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y-\sin x)\cdot\cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y-\sin x)$, pokud $y \neq \sin x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\sin x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi,(-1)^k) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\sin x)$ neexistuje pro $x \neq k\pi$. **14.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos y \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. **15.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, pokud $x \neq -y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-x^2,x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(-x^2,x)$ neexistují pro $x \in \mathbb{R}$. **16.** V $(x,-x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2+x^4 \neq 1$, pokud $x^2+x^4=1$, jsou obě parciální derivace nulové.

III. Zkoumejte parciální derivace a totální diferenciál funkcí

1. $x^m y^n$ **2.** e^{xy} **3.** $xy+yz+zx$ **4.** $\sqrt{x^2+y^2}$ **5.** $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ **6.** $|x|\cdot|y|$ **7.** $\sqrt[3]{xy}$
8. $|y-\sin x|$ **9.** $|\sin y - \sin x|$ **10.** $f(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0,0)=0$
11. $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ **12.** $x^{\frac{y}{z}}$ **13.** x^{y^z}

Spočtěte přibližně tak, že nahradíte přírůstek vhodné funkce jejím diferenciálem

14. $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{1.05^3}}}$ **15.** $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$ **16.** $0.97^{1.05}$ **17.** $1.04^{2.02}$ **18.** $1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3$
19. $\log(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $Df(x,y)(h,k) = mx^{m-1}y^n h + nx^m y^{n-1} k$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **2.** $Df(x,y)(h,k) = ye^{xy}h + xe^{xy}k$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **3.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = (y+z)h + (x+z)k + (x+y)l$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. V příkladech 4–9 jsou hodnoty parciálních derivací ve výsledcích k minulému souboru příkladů. **4.** $Df(x,y)$ existuje všude kromě $(0,0)$. **5.** $Df(x,y)$ existuje pro $y \neq -x$. ($Df(0,0)$ neexistuje.) **6.** $Df(x,y)$ existuje, pokud $x \neq 0$ a $y \neq 0$, a navíc v bodě $(0,0)$. **7.** $Df(x,y)$ existuje, pokud $x \neq 0$ a $y \neq 0$. ($Df(0,0)$ neexistuje.) **8.** $Df(x,y)$ existuje, pokud $y \neq \sin x$. **9.** $Df(x,y)$ existuje, pokud $\sin y \neq \sin x$, a ještě v bodech $(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi)$, $k,l \in \mathbb{Z}$. **10.** $Df(x,y)(h,k) = \frac{e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}}{(x^2+xy+y^2)^2}\cdot((2x+y)h+(x+2y)k)$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $Df(0,0)=0$. **11.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \left(\frac{z}{x}h - \frac{z}{y}k + l\log\frac{x}{y}\right)$, pokud $xy>0$. **12.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\left(\frac{y}{x}h + k\log x - l\frac{y}{z}\log x\right)$, pokud $x>0$ a $z \neq 0$. **13.** $Df(x,y,z)(h,k,l) = x^{y^z}\cdot y^z \cdot \left(\frac{h}{x} + k\frac{z}{y}\log x + l\log x\log y\right)$ pro $x>0$ a $y>0$. **14.** 1.0542 **15.** 2.95 **16.** 0.97 **17.** 1.08 **18.** 108.972 **19.** 0.005

IV. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z; M = [-1;1] \times [-1;1] \times [-1;1];$
2. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a > 0, b > 0; M = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\};$
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z; M = \mathbb{R}^3;$ **4.** $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2;$
5. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$
6. $f(x,y) = (x+y) e^{-2x-3y}; M = \{(x,y); x > 0, y > 0\}$
7. $f(x,y) = \left(x^2 + 5y^2\right) e^{-\left(3x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2;$
8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; M = \{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}; a > b > c > 0.$
9. $z(x,y) = x^2 + y^2, M = \{(x,y), x^2 + 4y^2 = 1\}$
10. $z(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2; M = \{(x,y), 4x^2 + y^2 = 1\}$
11. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

Výsledky a návody. **1.** max 5 v bodech $(1,1,1), (1,-1,1), (-1,1,1), (-1,-1,1)$, min -1 v bodě $(0,0,-1)$ **2.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ **3.** sup $+\infty$, min -14 v bodě $(-1,-2,3)$ **4.** min 0 v $(0,0)$, max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2+y^2=1$. **5.** max 1 v bodech $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, min 0 v $(0,0)$ **6.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se **7.** max $\frac{5}{e}$ v bodech $(0, \pm 1)$, min 0 v bodě $(0,0)$ **8.** max a^2 v bodech $(\pm a, 0, 0)$, min 0 v $(0,0,0)$ **9.** max 1 v bodech $(\pm 1, 0)$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $(0, \pm\frac{1}{2})$ **10.** max $\frac{17}{4}$ v bodech $(\frac{3}{10}, \frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5})$, min -2 v bodech $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$, $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ **11.** dno $4m \times 4m$, výška $2m$

V. V následujících úlohách zjistěte sup inf funkce f na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot f na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z,$
a) $M = \{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$
2. $f(x,y,z) = xyz,$
a) $M = \{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; x + y + z = 0\}$
3. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z, \; M = \{(x,y,z); x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
4. $f(x,y,z) = xy^2z^3, \; M = \{(x,y,z); x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}$, kde $a > 0$.
5. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^p + \cdots + x_n^p; M = \{(x_1, \ldots, x_n); x_1 + \cdots + x_n = a, \; x_1 > 0, \; \ldots, x_n > 0\}$; kde $a > 0, p > 0$. **6.** $f(x,y) = x + y, \; M = \{(x,y); x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$
7. $f(x,y,z) = 10z + x - y, \; M = \{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y + x \geq 0\}$ **8.** $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $M = \{(x,y), \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1\}$ **9.** $f(x,y) = y, \; M = \{(x,y), \left(x^2+y^2\right)^2 = Kxy\}$, kde $K > 0$

Výsledky a návody. **1.** a) max 3 v $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, min -3 v $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}})$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}})$; **2.** a) max $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$; b) max $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$; **3.** max $\frac{1}{8}$ v $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, inf 0, nenabývá se **4.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6})$, inf $-\infty$ **5.** pro $p = 1$ je f na M konstantní; pro $p > 1$ je sup a^p, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$; pro $p \in (0,1)$ je inf a^p, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$; **6.** max 2 v $(1,1)$, min 0 v (0,0) **7.** max $\sqrt{102}$ v $(\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}$; min $-\sqrt{102}$ v $(-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}$; **8.** max $\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{5})$; min $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -2\sqrt{5})$; **9.** max $\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15}, \frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}})$; min $-\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(-\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15}, -\frac{1}{4}\sqrt{k} \cdot 15^{\frac{3}{4}})$;

VI. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = 50x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}}$, $M = \{(x,y,z); 80x + 12y + 10z = 24000, x > 0, y > 0, z > 0\}$
2. $f(x,y) = y$, $M = \{(x,y); (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0\}$
3. $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{(x,y); 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$
4. Do elipsy $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ vepište obdélník největšího obsahu.
5. Do elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1$ vepište kvádr největšího objemu.
6. Najděte bod na jednotkové sféře, pro který je součet duhých mocnin vzdáleností od bodů $(7,0,0)$, $(5,3,1)$, $(0,1,2)$ nejmenší.

Výsledky a návody. **1.** max $500\sqrt[5]{5^4 \cdot 3^3 \cdot 2^2}$ v bodě $(150, 500, 600)$, inf 0, nenabývá se **2.** max $\frac{1}{2}$ v $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ a $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; min $-\frac{1}{2}$ v $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ a $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ **3.** max $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$ v bodech $(\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}})$ a $(-\sqrt{\frac{7}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}})$, min -1 v $(0,-1)$ **4.** obdélník o stranách $\sqrt{2}$ a $4\sqrt{2}$ **5.** kvádr o hranách $\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ **6.** bod $(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13})$

VII. Určete y' a y'' v bodech, v jejichž okolí je uvedenou rovnicí zadána diferencovatelná funkce $y = y(x)$

1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 \quad a \in \mathbb{R}$ **2.** $\log\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **3.** $y - \varepsilon \sin y = x \quad 0 < \varepsilon < 1$
4. $x^y = y^x$ **5.** $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Zjistěte, v okolí kterých bodů je následujícím předpisem zadána diferencovatelná funkce $z = z(x,y)$ a najděte její parciální derivace prvního a druhého řádu

6. $\frac{x}{z} = \log\frac{z}{y}$ **7.** $xyz = x + y + z$ **8.** $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0 \quad (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})$ (F je třídy C^2)
9. $F(xz, yz) = 0 \quad (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})$ (F je třídy C^2)
10. Dokažte, že existují funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$, pro které platí $u(1,2) = v(1,2) = 0$, a které na nějakém okolí bodu $(1,2)$ splňují rovnice $xe^{u+v} + 2uv = 1$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^1$. Spočtěte jejich diferenciál v bodě $(1,2)$.
11. Nechť $M = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-1 = 0, x^2+y^2-x = 0\}$. Najděte $a \in M$, aby $P = M \setminus \{a\}$ byla jednorozměrná plocha třídy $\mathcal{C}^1$.
12. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ „v bodě $u = 2$, $v = 1$“, jestliže $x = u + v^2$, $y = u^2 - v^3$, $z = 2uv$.

Výsledky a návody. **1.** $y' = \frac{y+x}{y-x}$, $(x,y) \neq (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}), (\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}})$ **2.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $(x,y) \neq (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}), (-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$ **3.** $y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$ **4.** $y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{x\log y + y}{y \log x + x}$, $(x,y) \neq (e,e)$ **5.** $y' = \frac{y}{x}$ **6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$ s výjimkou bodů $(-\frac{y}{e}, y, \frac{y}{e})$ **7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xz}{xy-1}$ **8.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z-x)(z-y)\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1 F\cdot\partial_2 F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1 F)^2\right) + 2\partial_2 F\cdot(\partial_1 F + 2x\partial_2 F)\cdot(\partial_1 F + 2y\partial_2 F)}{(\partial_1 F + 2z\partial_2 F)^3}$, $(\partial_1 F + 2z\partial_2 F) \neq 0$ **9.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{zy\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1 F\cdot\partial_2 F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1 F)^2\right) + 2z^2(\partial_1 F)^2}{(x\partial_1 F + y\partial_2 F)^3}$, $(x\partial_1 F + y\partial_2 F) \neq 0$ **10.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$ **11.** $(1,0,0)$ **12.** $\frac{26}{121}$

VIII. Implicitní funkce

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2, 0]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$;
b) napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.
2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$;
b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;
c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.
3. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že
a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.
4. Dokažte, že množina bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

je v okolí bodu $(1, 1, 1)$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Určete totální diferenciál v bodě (1,1) a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

Výsledky a návody. **1.** tečna: $y = 0$ **2.** tečná rovina $z = \frac{7}{5}(y + 2) + 1$ **4.** tečná rovina $z = -(x - 1) - (y - 1) + 1$

IX. Řešte soustavy rovnic

1. $\begin{array}{rl} x+2y-z &= 1 \\ 2x+3y &= 1 \\ -y+z &= 1 \end{array}$ **2.** $\begin{array}{rl} x - z &= -2 \\ -x+y &= 1 \\ 2x+y+3z &= 13 \end{array}$ **3.** $\begin{array}{rl} x_1+2x_2-3x_3+x_4 &= -5 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4 &= 0 \\ 7x_1-x_2+4x_3-3x_4 &= 15 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4 &= -3 \end{array}$ **4.** $\begin{array}{rl} x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 2 \\ x_1 -x_4 &= -1 \\ x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2 &= -1 \end{array}$

Příklady 1 a 2 řešte pomocí výpočtu inverzní matice (existuje-li), v příkladech 3 a 4 použijte Gaussovu eliminaci a navíc spočtěte determinant soustavy.

Výsledky a návody. **1.** inverzní matice: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, řešení $x = 5, y = -3, z = -2$ **2.** inverzní matice: $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 5/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$, řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ **3.** determinant -60, řešení $(1, 0, 2, 0)$ **4.** determinat 1, řešení $(5, -3, 3, 6)$

X. Matice a determinanty

1. Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 & a \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

2. Spočtěte následující determinanty:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

3. Najděte řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rl} x_1+2x_2+2x_3+3x_4 &= 5 \\ 6x_1+15x_2+12x_3+25x_4 &= 42 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+8x_4 &= 14 \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4 &= -7 \end{array}$$

Výsledky a návody. **1.** hodnost 4 pro $a \neq 1$, pro $a = 1$ hodnost 3 **2.** 0, 29400000 **3.** nekonečně mnoho řešení tvaru $(-3 - 2t, 4, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$

XI. Nalezněte primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3+2x+\frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x+16e^{8x}-\frac{1}{x}+3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \log x\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a,b\in\mathbb{R}$
16. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. **1.** $\frac{1}{4}x^4+x^2+16\log|x|+C$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x+2e^{8x}-\log|x|+3\sin x+C$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $\frac{1}{8}\sin^8 x+C$ na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ na $\mathbb{R}$ **5.** $-\log|\cos x|+C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **6.** $\log|\sin x|+C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **7.** $\operatorname{tg} x-x+C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **8.** $-\operatorname{cotg} x-x+C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.** $\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **10.** $-\log|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|+C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **11.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$ na $\mathbb{R}$ **12.** $(x-1)e^x+C$ na $\mathbb{R}$ **13.** $x\log x-x+C$ na $(0,\infty)$ **14.** $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **15.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx+b\sin bx)+C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2\neq 0$; $x+C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **16.** $\frac{1}{4}|x|x^3+C$ na $\mathbb{R}$ **17.** $F(x)+C$ na $\mathbb{R}$, kde

$$F(x)=\begin{cases} 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[-\infty,-x_2] \\ -\pi(x+x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[-x_2,-x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1] \\ \pi(x-x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[x_1,x_2] \\ 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x_1&=\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2&=\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}\end{aligned}$$

XII. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x\cdot\sin^3 x}$ **2.** $\int\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int\frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **4.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **5.** $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$
6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ **7.** $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int\frac{(2x+3)\ \mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$ **9.** $\int\log^2 x\,\mathrm{d}x$
10. $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int\frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int\frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int\frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$
15. $\int\frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ **16.*** V závislosti na parametru $\alpha>0$ vypočtěte: (a) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}$ (b) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha\cos x)^2}$
17.* Spočtěte: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$ (pracné) **18.*** Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c\in\mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$?