I. Určete (a nakreslete) definiční obor a vrstevnice funkcí

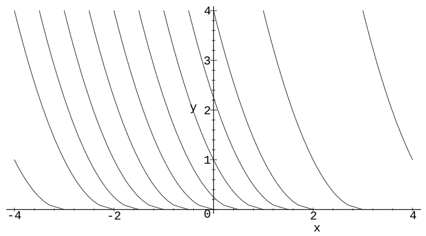
1. $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ **2.** $f(x,y) = \frac{y}{x}$ **3.** $f(x,y) = x^2 + y^2$ **4.** $f(x,y) = x^2 - y^2$
5. $f(x,y) = \sqrt{xy}$ **6.** $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **7.** $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
8. $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ **9.** $f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$
10. $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ **11.** $f(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$ **12.** $f(x,y) = |x| + y$

Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici

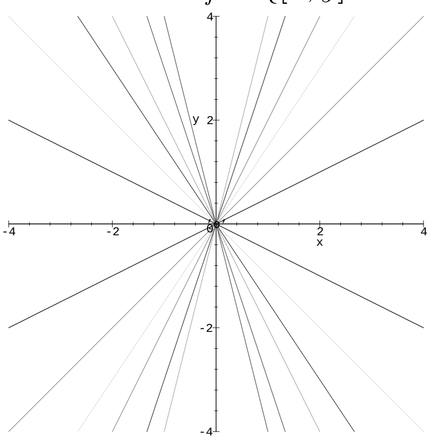
13. (a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$
14. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \le 0\}$ **15.** $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ **16.** $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ge 1\}$
17. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y > 17\}$ **18.** $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| > x + y\}$
19. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| = x - y\}$ **20.** $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$
21. $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y > 0, x + y = 2, z \le 0\}$

Výsledky a návody.

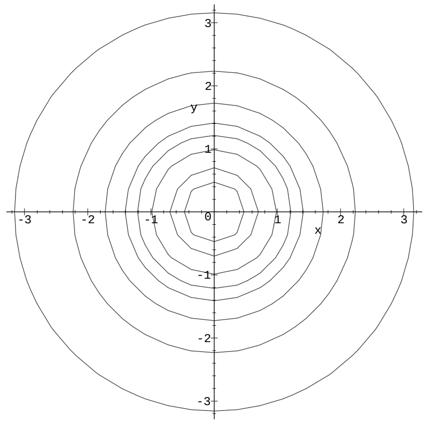
1. $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0\}$



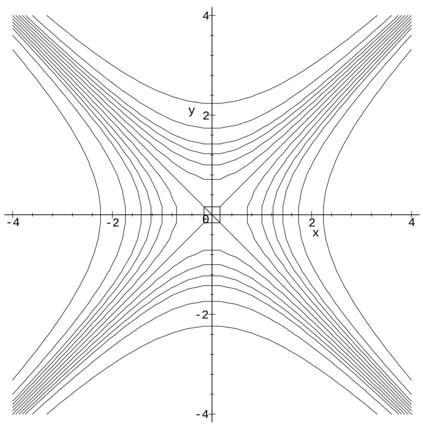
2. $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$



3. $D_f = \mathbb{R}^2$

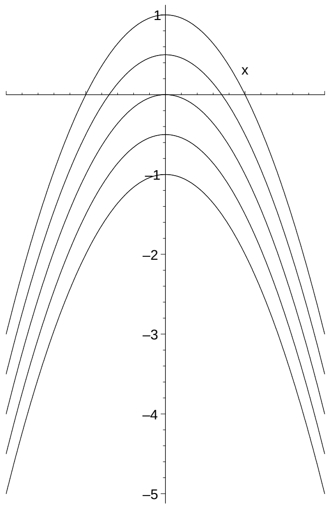


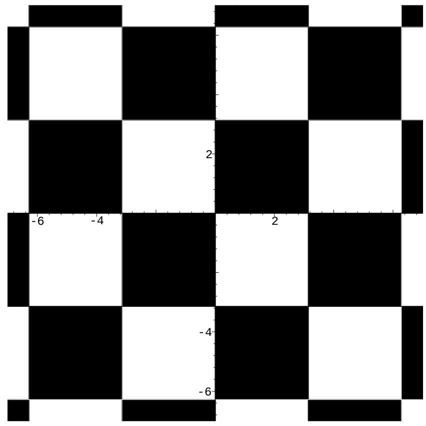
4. $D_f = \mathbb{R}^2$



5. $D_f = \{[x,y] \mid (x \ge 0\ \&\ y \ge 0) \vee (x \le 0\ \&\ y \le 0)\}$, vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}$ pro $c > 0$ spolu s dvojicí os. **6.** $D_f = \{[x,y] \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **7.** $D_f = \{[x,y] \mid x^2 + y^2 > 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **8.** $D_f = \{[x,y] \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. **9.** $D_f = \{[x,y] \mid -x^2 - 1 \le y \le -x^2 + 1\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. **10.** $D_f = \{[x,y] \mid 2k\pi \le x^2 + y^2 \le (2k+1)\pi$ pro nějaké $k = 0, 1, 2, \dots\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. **11.** $D_f = \mathbb{R}^2$, jsou tři vrstevnice - vnitřky černých čtverců, vnitřky bílých čtverců a hraniční přímky. **12.** $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice jsou grafy funkcí $y = k - |x|$.

Ad **9.** Ad **11.**





13. (a) $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $H(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. (b) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $H(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ (c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. (d) Ani otevřená, ani uzavřená, vnitřek $(-\infty, 0)$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$. **14.** Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\}$, uzávěr $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$, hranice$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\ \&\ y \leq 0\ \&\ (x = 0 \vee y = 0)\}$. **15.** Otevřená, uzávěr $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, hranice $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **16.** Uzavřená, vnitřek $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$, hranice $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **17.** Otevřená, hranice $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y = 17\}$, uzávěr $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y \leq 17\}$ **18.** Otevřená, uzávěr $\{[x, y] \mid x + y \leq 0\}$, hranice $\{[x, y] \mid x + y = 0\}$. **19.** Uzavřená, vnitřek $\{[x, y] \mid x + y > 0\}$, hranice $\{[x, y] \mid x + y = 0\}$. **20.** Uzavřená, prázdný vnitřek. **21.** Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.

==

II. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

1. $x^m y^n$ **2.** e^{xy} **3.** $xy + yz + zx$ **4.** $\sqrt{x^2 + y^2}$ **5.** $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ **6.** $|x| \cdot |y|$ **7.** $\sqrt[3]{xy}$
8. $|y - \sin x|$ **9.** $|\sin y - \sin x|$ **10.** $\sqrt[3]{x + y^2}$ **11.** $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y} \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$
12. $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2 + xy + y^2}}$, $f(0, 0) = 0$ **13.** $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ **14.** $x^{\frac{y}{z}}$ **15.** x^{y^z}

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **2.** $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **3.** $\frac{\partial f}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x+y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **4.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pokud $(x,y) \neq (0,0)$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistují. **5.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, pokud $y \neq -x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$ neexistují pro $x \neq 0$. **6.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **7.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **8.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y - \sin x) \cdot \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y - \sin x)$, pokud $y \neq \sin x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **9.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos y \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. **10.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, pokud $x \neq -y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-x^2, x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(-x^2, x)$ neexistují pro $x \in \mathbb{R}$. **11.** V $(x, -x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2 + x^4 \neq 1$, pokud $x^2 + x^4 = 1$, jsou obě parciální derivace nulové. **12.** $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové. **13.** Pokud $x, y > 0$ nebo $x, y < 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \log \frac{x}{y}$. **14.** Pokud $x > 0$ a $y \neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{y}{z^2}$. **15.** Pokud $x, y > 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z - 1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot zy^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot y^z \cdot \log y$.

III. V NÁSLEDUJÍCÍCH ÚLOHÁCH ZJISTĚTE sup A inf FUNKCE NA MNOŽINĚ M A VYŠETŘETE, ZDA TĚCHTO HODNOT FUNCE NA M NABÝVÁ.

1. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$; $M = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$;
2. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $\quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$
3. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a > 0, b > 0$; $M = \{[x,y]; x^2 + y^2 \leq 1\}$;
4. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$; $M = \mathbb{R}^3$; **5.** $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}$; $M = \mathbb{R}^2$;
6. $f(x,y) = \left(x^2 + 5y^2\right) e^{-\left(3x^2+y^2\right)}$; $M = \mathbb{R}^2$;
7. $f(x,y) = (x+y) e^{-2x-3y}$; $M = \{[x,y]; x > 0, y > 0\}$
8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $M = \{[x,y,z]; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$; $a > b > c > 0$.
9. $z(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x,y], x^2 + 4y^2 = 1\}$
10. $z(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$; $M = \{[x,y], 4x^2 + y^2 = 1\}$
11. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** max 5 v bodech $[1,1,1]$, $[1,-1,1]$, $[-1,1,1]$, $[-1,-1,1]$, min -1 v bodě $[0,0,-1]$ **2.** max 1 v bodech $[\pm 1, 0]$, $[0, \pm 1]$, min 0 v $[0,0]$ **3.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$ **4.** sup neexistuje, f není shora omezená, min -14 v bodě $[-1,-2,3]$ **5.** min 0 v $[0,0]$, max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2 + y^2 = 1$. **6.** max $\frac{5}{e}$ v bodech $[0, \pm 1]$, min 0 v bodě $[0,0]$ **7.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se **8.** max a^2 v bodech $[\pm a, 0, 0]$, min 0 v $[0,0,0]$ **9.** max 1 v bodech $[\pm 1, 0]$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $[0, \pm\frac{1}{2}]$ **10.** max $\frac{17}{4}$ v bodech $[\frac{3}{10}, \frac{4}{5}]$, $[-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5}]$, min -2 v bodech $[\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}]$, $[-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ **11.** dno $4m \times 4m$, výška $2m$

IV. V NÁSLEDUJÍCÍCH ÚLOHÁCH ZJISTĚTE sup A inf FUNKCE f NA MNOŽINĚ M A VYŠETŘETE, ZDA TĚCHTO HODNOT f NA M NABÝVÁ.

1. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$,
a) $M = \{[x,y,z], x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{[x,y,z], x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$

2. $f(x,y,z) = xyz$,
a) $M = \{[x,y,z], x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{[x,y,z], x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 0\}$

3. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{[x,y,z]; x+y+z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$

4. $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $M = \{[x,y,z]; x+2y+3z = a, x > 0, y > 0\}$, kde $a > 0$.

5. $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^p + \cdots + x_n^p$; $M = \{[x_1,\ldots,x_n]; x_1+\cdots+x_n = a,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$; kde $a > 0, p > 0$. **6.** $f(x,y) = x+y$, $M = \{[x,y]; x^3+y^3-2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$

7. $f(x,y,z) = 10z + x - y$, $M = \{[x,y,z], x^2+y^2+z^2 \leq 1, y+x \geq 0\}$ **8.** $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $M = \{[x,y], \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1\}$ **9.** $f(x,y) = y$, $M = \{[x,y], \left(x^2+y^2\right)^2 = Kxy\}$, kde $K > 0$

10. Je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ a $M \subset \mathbf{R}^n$, je vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od množiny M rovna $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M) = \inf\{\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\colon \mathbf{y} \in M\}$, vzdálenost množiny M od množiny $N \subset \mathbf{R}^n$ je rovna $\operatorname{dist}(M,N) = \inf\{\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\colon \mathbf{x} \in M, \mathbf{y} \in N\}$. Určete vzdálenosti:
(a) bodu $[a, \frac{1}{2}] \in \mathbf{R}^2$ od paraboly $y = x^2$; (b) bodu $[-a, -\frac{1}{a}] \in \mathbf{R}^2$ $(a > 0)$ od větve hyperboly $y = 1/x$, $x > 0$; (c) přímky $y = x - 50$ od paraboly $y = x^2$.

11. Je-li $M \subset \mathbf{R}^n$ neprázdná a omezená, jejím průměrem rozumíme číslo $\operatorname{diam} M = \sup\{\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\colon \mathbf{x},\mathbf{y} \in M\}$. Určete průměr množiny $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2\colon |x|^p + |y|^p = 1\}$ v závislosti na $p > 1$.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) max 3 v $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, min -3 v $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}]$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}]$; **2.** a) max $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$; min $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$; b) max $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}]$; min $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}]$; **3.** max $\frac{1}{8}$ v $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, inf 0, nenabývá se **4.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}]$, inf $-\infty$ **5.** pro $p = 1$ je f na M konstantní; pro $p > 1$ je sup a^p, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $[\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}]$; pro $p \in (0,1)$ je inf a^p, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $[\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}]$; **6.** max 2 v $[1,1]$, min 0 v $[0,0]$ **7.** max $\sqrt{102}$ v $[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}]$; min $-\sqrt{102}$ v $[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}]$; **8.** max $\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $[\frac{\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{5}]$; min $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -2\sqrt{5}]$; **9.** max $\frac{1}{4}\sqrt{K} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $[\frac{1}{4}\sqrt{K}\sqrt[4]{15}, \frac{1}{4}\sqrt{K} \cdot 15^{\frac{3}{4}}]$; min $-\frac{1}{4}\sqrt{K} \cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $[-\frac{1}{4}\sqrt{K}\sqrt[4]{15}, -\frac{1}{4}\sqrt{K} \cdot 15^{\frac{3}{4}}]$. **10.** (a) $\sqrt{a^2 - \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{a^4} + \frac{1}{4}}$
(b) $\frac{1}{a}\sqrt{(1 + \sqrt[3]{a^4}^3)}$ (c) $\frac{1}{8}\sqrt{79202}$ **11.** 2 pro $p \in (1,2\rangle$, $2^{\frac{3p-2}{2p}}$ pro $p > 2$

V. Implicitní funkce

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2,0]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$.
b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.
c) Spočtěte $f''(2)$.
d) Pro které body $[a,0]$, $a \in \mathbf{R}$ lze dokázat tvrzení analogické a) ?
e) Načrtněte množinu všech bodů $[x,y]$ splňujících uvedený vztah.
2. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0,1]$. Dokažte, že
a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.
c) Je funkce f na okolí 0 konvexní nebo konkávní?
3. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1,-2,1]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x,y)$ v jistém okolí U bodu $[1,-2]$, pro kterou platí $z(1,-2) = 1$;
b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;
c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x,y)$ v bodě $[1,-2]$.
4. Dokažte, že množina bodů $[x,y,z] \in \mathbf{R}^3$ které splňují vztah $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ je v okolí bodu $[1,1,1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x,y)$ definované na jistém okolí bodu $[1,1]$, pro kterou je $f(1,1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1,1]$.

– –

Výsledky a návody. **1.** (b) tečna: $y = 0$ (c) 0 (d) pro $a \neq -1$. (e) Do množiny patří všechny body osy x (tj. body $[a,0]$ pro $a \in \mathbf{R}$), pro $a \neq -1$ existuje právě jeden bod $\varphi(a) \neq 0$, pro který $[a,\varphi(a)]$ patří do množiny. Pro $a > -1$ je $\varphi(a) < 0$, pro $a < -1$ je $\varphi(a) > 0$, lze ukázat, že $\lim_{a\to -1} \varphi(a) = 0$. **2.** (b) Spočtěte $f'(0)$ a ověřte, že $f'(0) = 2 > 0$. (c) Je $f''(0) = -14$, a tedy f'' je záporná na okolí 0, tudíž f je na okolí 0 ryze konkávní. **3.** tečná rovina $z = \frac{7}{5}(y+2) + 1$ **4.** tečná rovina $z = -(x-1) - (y-1) + 1$

═══

VI. Určete hodnost matic (v závislosti na parametru)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 15 & 12 & 25 & 42 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a \\ (1-a) & -2 & -1 \\ a & 2a & a \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a & 2a \\ (1-a) & -2 & -1 & 2 \\ a & 2a & a & a+1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 & a \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

najděte inverzní matice k následujícím maticím

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. Na základě výsledků předchozích příkladů napište inverzní matice k maticím, které vzniknou: a) přehozením prvního a druhého řádku v matici z příkladu 8; b) vynásobením čtvrtého řádku matice z příkladu 10 číslem 11; c) přičtením sedminásobku třetího řádku k prvnímu řádku v matici z příkladu 9; d) z matice v příkladu 11 tak, že místo prvního řádku napíšeme trojnásobek druhého a místo druhého pětinásobek prvního.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** 3 **2.** 3 **3.** 3 pro $a \neq 1$, 1 pro $a = 1$ **4.** 3 pro $a \neq 0, -1, 2$, jinak 2 **5.** 3 pro $a \neq -1$, 2 pro $a = -1$ **6.** 3 **7.** hodnost 4 pro $a \neq 1$, pro $a = 1$ hodnost 3 **8.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 5/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 0 & -1/21 & 5/42 & 11/42 \\ -1/2 & 23/42 & -5/42 & 5/21 \\ -1/2 & 13/42 & -1/42 & 1/21 \\ 1/2 & -5/42 & 1/21 & -25/42 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **12.** Inverzní matice vzniknou z inverzní matice k původní matici a) přehozením prvního a druhého sloupce; b) vynásobením čtvrtého sloupce číslem 1/11; c) odečtením sedminásobku prvního sloupce od třetího sloupce; d) tak, že místo prvního sloupce napíšeme 1/3 druhého a místo druhého sloupce 1/5 prvního. (To vše lze zdůvodnit například s použitím definice inverzní matice a definice maticového násobení. Jiná, méně přímá, možnost je vhodně použít větu o násobení a transformaci.)

==

VII. Spočtěte determinanty

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

8. Určete, čemu se rovná determinant matice, která vznikne:
a) z matice v příkladu 2 přerovnáním řádků v pořadí 2,3,1;
b) vynásobením matice v příkladu 3 číslem −1;
c) přerovnáním sloupců v matici z příkladu 4 v pořadí 4,2,1,3;
d) vynásobením matice z příkladu 7 číslem 1/100;
e) součinem matic z příkladu 4 a 5;
f) jako $A^T AB$, kde A je matice z příkladu 1 a B matice z příkladu 6;
g)* jako AA^T, kde A je matice z příkladu 1.

najděte řešení soustav lineárních rovnic

9. $\begin{aligned} x+2y-z&= 1 \\ 2x+3y &= 1 \\ -y+z&= 1 \end{aligned}$ **10.** $\begin{aligned} x - z &= -2 \\ -x+y &= 1 \\ 2x+y+3z &= 13 \end{aligned}$ **11.** $\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+x_4&= -5 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4&= 0 \\ 7x_1-x_2+4x_3-3x_4&= 15 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4&= -3 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4&= 2 \\ x_1 -x_4&= -1 \\ x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2 &= -1 \end{aligned}$ **13.** $\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3+3x_4&= 5 \\ 6x_1+15x_2+12x_3+25x_4&= 42 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+8x_4&= 14 \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4&= -7 \end{aligned}$

14. Pro které pravé strany má soustava se stejnou maticí jako v předchozím příkladu řešení?

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** Determinant neexistuje, matice není čtvercová. **2.** 1 **3.** 6 **4.** -84 **5.** 1 **6.** 0 **7.** -29400000 **8.** a) 1; b) -6; c) -84; d) -29.4; e) -84; f) 0 (protože $\det B = 0$); g) 0 (kromě přímého výpočtu lze postupovat například následovně: ověřte, že $h(A) < 5$, odtud odvoďte (třeba podle věty o součinu matic a transformaci), že $h(AA^T) < 5$, a tedy $\det(AA^T) = 0$). **9.** $x = 5$, $y = -3$, $z = -2$ **10.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ **11.** $(1, 0, 2, 0)$ **12.** $(5, -3, 3, 6)$ **13.** nekonečně mnoho řešení tvaru $(-3 - 2t, 4, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ **14.** právě pro pravé strany (a, b, c, d), kde $7a = b + d$.

===

VIII. Zjistěte, zda následující řady konvergují absolutně, konvergují neabsolutně či divergují (v závislosti na parametru)

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k$ **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x \in \mathbb{R}$ **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\ln x}$, $x \in \mathbb{R}$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^2+7} - \sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$ **10.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k+3^k}$

11. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **12.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$ **13.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$ **14.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$

15. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k})$ **16.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{k})$ **17.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}(e^{\sqrt{k^2+11}-\sqrt{k^2+1}})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

18. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}$, $x \in \mathbb{R}$ **19.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^4 x^n$, $x \in \mathbb{R}$ **20.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$, $x \in \mathbb{R}$ **21.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$

22. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, $x \in \mathbb{R}$ **23.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi) \left(\sqrt{k+11} - \sqrt{k+2}\right)$ **24.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$

25. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1\right)$ **26.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$ **27.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ **28.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$

29. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) \frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** Konverguje absolutně. **2.** Konverguje absolutně. **3.** Konverguje absolutně. **4.** Diverguje. **5.** Konverguje absolutně. **6.** Diverguje. **7.** Konverguje absolutně pro $x \neq \pm 1$, diverguje pro $x = \pm 1$. **8.** Pro $0 < x < \frac{1}{e}$ konverguje absolutně, jinak diverguje (pro $x \leq 0$ nemá smysl). **9.** Konverguje absolutně. **10.** Konverguje absolutně. **11.** Pro $\alpha > \frac{1}{2}$ konverguje absolutně, jinak diverguje. **12.** Diverguje. **13.** Konverguje neabsolutně. **14.** Konverguje absolutně. **15.** Konverguje neabsolutně. **16.** Konverguje absolutně. **17.** Konverguje absoluně pro $\alpha < -1$, jinak diverguje. **18.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, jinak diverguje. **19.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| \geq 1$. **20.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, pro $x = 1$ konverguje neabsolutně, pro $x = -1$ diverguje. **21.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, diverguje pro $|x| > 1$. **22.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, konverguje neabsolutně pro $|x| = 1$. **23.** Konverguje (neabsolutně). **24.** Konverguje neabsolutně. **25.** Konverguje. **26.** Konverguje neabsolutně. **27.** Konverguje neabsolutně. **28.** Diverguje. **29.** Diverguje.