## I. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici

**1.** (a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{N}$ (c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (d) $(-\infty, 0) \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ **2.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \leq 0\}$
**3.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ **4.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ **5.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y > 17\}$
**6.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| > x+y\}$ **7.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| = x-y\}$
**8.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$ **9.** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y > 0, x+y = 2, z \leq 0\}$

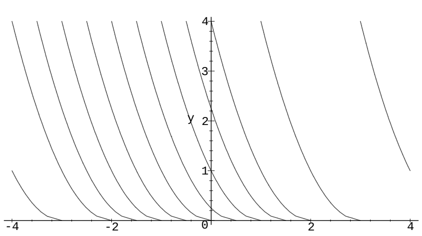
## Určete (a nakreslete) definiční obor a vrstevnice funkcí

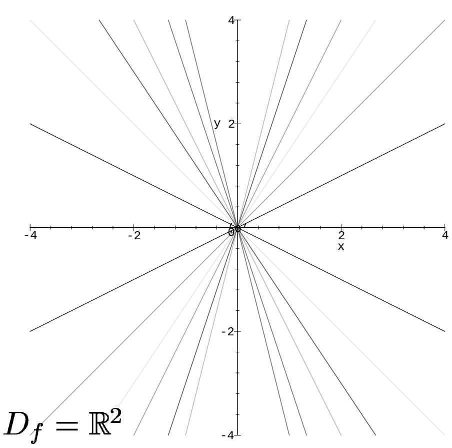
**10.** $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ **11.** $f(x,y) = \frac{y}{x}$ **12.** $f(x,y) = x^2 + y^2$ **13.** $f(x,y) = x^2 - y^2$
**14.** $f(x,y) = \sqrt{xy}$ **15.** $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **16.** $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
**17.** $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ **18.** $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)^2}$
**19.** $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ **20.** $f(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$ **21.** $f(x,y) = |x| + y$

---

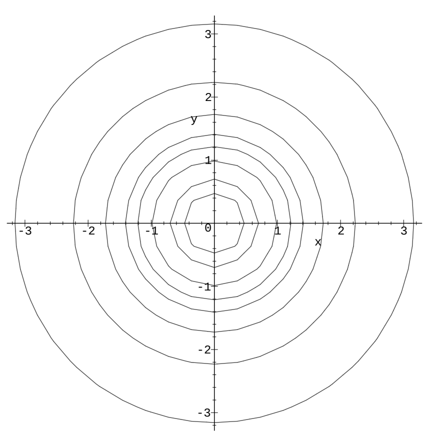
Výsledky a návody. **1.** (a) $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $H(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. (b) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $H(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ (c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. (d) Ani otevřená, ani uzavřená, vnitřek $(-\infty, 0)$, uzávěr $\mathbb{R}$, hranice $[0, \infty)$. **2.** Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y < 0\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$, hranice$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\ \&\ y \leq 0\ \&\ (x = 0 \vee y = 0)\}$. **3.** Otevřená, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **4.** Uzavřená, vnitřek $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. **5.** Otevřená, hranice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y = 17\}$, uzávěr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + e^y \leq 17\}$ **6.** Otevřená, uzávěr $\{(x,y) \mid x + y \leq 0\}$, hranice $\{(x,y) \mid x + y = 0\}$. **7.** Uzavřená, vnitřek $\{(x,y) \mid x + y > 0\}$, hranice $\{(x,y) \mid x + y = 0\}$. **8.** Uzavřená, prázdný vnitřek. **9.** Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.

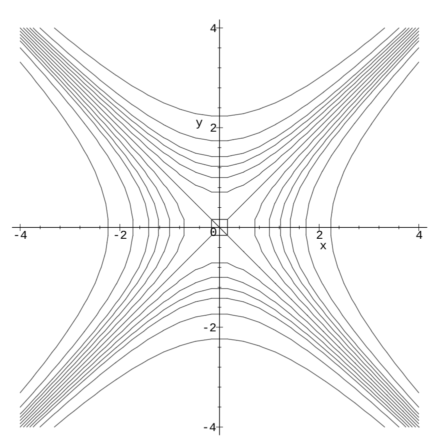
**10.** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ **11.** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$





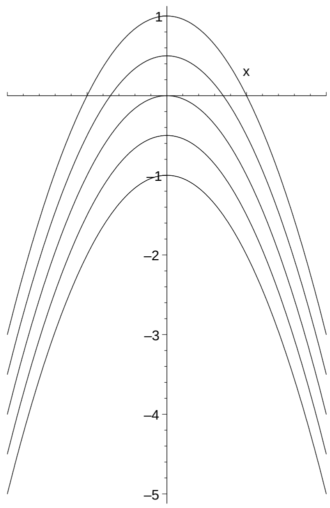
**12.** $D_f = \mathbb{R}^2$ **13.** $D_f = \mathbb{R}^2$



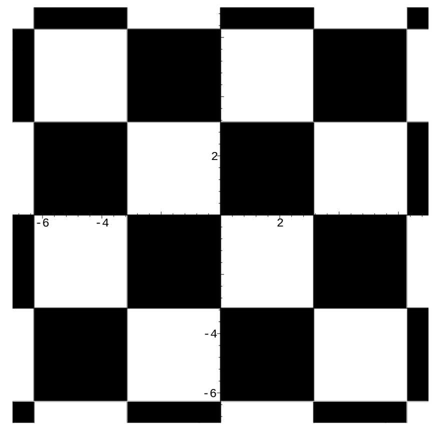


**14.** $D_f = \{(x,y) \mid (x \geq 0 \; \& \; y \geq 0) \vee (x \leq 0 \; \& \; y \leq 0)\}$, vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}$ pro $c > 0$ spolu s dvojicí os. **15.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **16.** $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$, vrstevnice jsou kružnice. **17.** $D_f = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. **18.** $D_f = \{(x,y) \mid -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. **19.** $D_f = \{(x,y) \mid 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi$ pro nějaké $k = 0, 1, 2, \ldots\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. **20.** $D_f = \mathbb{R}^2$, jsou tři vrstevnice - vnitřky černých čtverců, vnitřky bílých čtverců a hraniční přímky. **21.** $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice jsou grafy funkcí $y = k - |x|$.

Ad **18.**




Ad **20.**




---

II. Určete v kterých bodech je funkce $f$ spojitá vzhledem k množině $M$, pokud

**1.** $f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy = 0, \\ 0 & \text{jinak}; \end{cases}$ a) $M = \mathbb{R}^2$, b) $M = \{[x,y] : x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$, c) $M = \{[x,y] : x = y\}$.

**2.** $f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x \neq 0, \\ 0 & \text{jinak}; \end{cases}$ a) $M$ je nějaká přímka procházející počátkem, b) $M = \mathbb{R}^2$.

**3.** $f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y} & x \neq 0 \neq y, \\ x + y & \text{jinak}; \end{cases}$ a) $M$ je nějaká přímka procházející počátkem, b) $M$ je nějaká přímka rovnoběžná s osou $x$, c) $M = \mathbb{R}^2$.

**4.** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & x \neq 0, \\ y & x = 0; \end{cases}$ $M = \mathbb{R}^2$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Výsledky a návody. **1.** a) V bodech $[x,y]$, kde $xy \neq 0$ (tj. v bodech mimo osy), b) ve všech bodech množiny $M$ ($f$ je na $M$ konstantní), c) ve všech bodech množniny $M$ s výjimkou bodu $[0,0]$. **2.** a) Je-li tou přímkou osa $x$ nebo osa $y$, pak ve všech bodech množiny $M$. Ostatní přímky procházející počátkem protínají parabolu $y = x^2$ ve dvou bodech - $[0,0]$ a ještě jednom, říkejme mu $A$. $f$ je spojitá ve všech bodech množiny $M$ s výjimkou bodu $A$. b) Ve všech bodech, které neleží na parabole $y = x^2$. **3.** a) Ve všech bodech množiny $M$. b) Je-li $M$ osa $x$, pak ve všech jejích bodech; v ostatních případech s výjimkou průsečíku s osou $y$. c) V bodech mimo osy (tj. v takových $[x,y]$, že $x \neq 0 \neq y$) a ještě v bodě $[0,0]$. **4.** Ve všech bodech $\mathbb{R}^2$.

## III. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině $M$ a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na $M$ nabývá.

**1.** $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z; M = [-1;1] \times [-1;1] \times [-1;1];$
**2.** $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a > 0, b > 0; M = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 1\};$
**3.** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z; M = \mathbb{R}^3;$ **4.** $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2;$
**5.** $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \le 1\}$
**6.** $f(x,y) = (x+y)\, e^{-2x-3y}; M = \{(x,y); x > 0, y > 0\}$
**7.** $f(x,y) = \left(x^2 + 5y^2\right) e^{-\left(3x^2+y^2\right)}; M = \mathbb{R}^2;$
**8.** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; M = \{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}; a > b > c > 0.$
**9.** $z(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x,y), x^2 + 4y^2 = 1\}$
**10.** $z(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$; $M = \{(x,y), 4x^2 + y^2 = 1\}$
**11.** Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

---

Výsledky a návody. **1.** max 5 v bodech $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, min $-1$ v bodě $(0,0,-1)$ **2.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ **3.** sup $+\infty$, min $-14$ v bodě $(-1,-2,3)$ **4.** min 0 v $(0,0)$, max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2 + y^2 = 1$. **5.** max 1 v bodech $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, min 0 v $(0,0)$ **6.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se **7.** max $\frac{5}{e}$ v bodech $(0, \pm 1)$, min 0 v bodě $(0,0)$ **8.** max $a^2$ v bodech $(\pm a, 0, 0)$, min 0 v $(0,0,0)$ **9.** max 1 v bodech $(\pm 1, 0)$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $(0, \pm\frac{1}{2})$ **10.** max $\frac{17}{4}$ v bodech $(\frac{3}{10}, \frac{4}{5})$, $(-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5})$, min $-2$ v bodech $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$, $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ **11.** dno $4m \times 4m$, výška $2m$

---

## IV. Implicitní funkce

**1.** Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2,0]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$;
b) napište rovnici tečny ke grafu funkce $f$ v bodě 2.
**2.** Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1,-2,1]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x,y)$ v jistém okolí $U$ bodu $[1,-2]$, pro kterou platí $z(1,-2) = 1$;
b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí $U$;
c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x,y)$ v bodě $[1,-2]$.
**3.** Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0,1]$. Dokažte, že
a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
b) funkce $f$ roste v jistém okolí bodu 0.
**4.** Dokažte, že množina bodů $(x,y,z) \in \mathbb{R}$, které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

je v okolí bodu $(1,1,1)$ popsatelná jako graf funkce $f(x,y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1,1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f$ v bodě $(1,1)$.

---

Výsledky a návody. **1.** tečna: $y = 0$ **2.** tečná rovina $z = \frac{7}{5}(y+2) + 1$ **3.** Spočtěte $f'(0)$ a ověřte, že $f'(0) > 0$. **4.** tečná rovina $z = -(x-1) - (y-1) + 1$

## V. Určete $y'$ a $y''$ v bodech, v jejichž okolí je uvedenou rovnicí zadána diferencovatelná funkce $y = y(x)$

**1.** $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 \quad a \in \mathbb{R}$ **2.** $\log\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **3.** $y - \varepsilon\sin y = x \quad 0 < \varepsilon < 1$
**4.** $x^y = y^x$ **5.** $y = 2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

## Zjistěte, v okolí kterých bodů je následujícím předpisem zadána diferencovatelná funkce $z = z(x,y)$ a najděte její parciální derivace prvního a druhého řádu

**6.** $\frac{x}{z} = \log\frac{z}{y}$ **7.** $xyz = x + y + z$ **8.** $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0 \quad (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})$ ($F$ je tří dy $C^2$)
**9.** $F(xz, yz) = 0 \quad (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})$ ($F$ je tří dy $C^2$)
**10.** Dokažte, že existují funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$, pro které platí $u(1,2) = v(1,2) = 0$, a které na nějakém okolí bodu $(1,2)$ splňují rovnice $xe^{u+v} + 2uv = 1$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^1$. Spočtěte jejich parciální derivace prvního řádu v bodě $(1,2)$.
*__11.__ Nechť $x_0$ je jednonásobný kořen rovnice $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že kdykoli $|b_i - a_i| < \delta$ pro $i = 1, \dots, n$, pak rovnice $x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ má v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen. Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial b_i}(a_1, \dots, a_n)$. (Co se stane, bude-li kořen $x_0$ $p$-násobný?)

---

Výsledky a návody. **1.** $y' = \frac{y+x}{y-x}$, $(x,y) \neq (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}), (\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}})$ **2.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $(x,y) \neq (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}), (-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$ **3.** $y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$ **4.** $y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{x\log y + y}{y\log x + x}$, $(x,y) \neq (e,e)$ **5.** $y' = \frac{y}{x}$ **6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$ s výjimkou bodů $(-\frac{y}{e}, y, \frac{y}{e})$ **7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xz}{xy-1}$ **8.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z-x)(z-y)\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1 F\cdot\partial_2 F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1 F)^2\right) + 2\partial_2 F\cdot(\partial_1 F + 2x\partial_2 F)\cdot(\partial_1 F + 2y\partial_2 F)}{(\partial_1 F + 2z\partial_2 F)^3}$, $(\partial_1 F + 2z\partial_2 F) \neq 0$ **9.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{zy\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1 F\cdot\partial_2 F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1 F)^2\right) + 2z^2(\partial_1 F)^2}{(x\partial_1 F + y\partial_2 F)^3}$, $(x\partial_1 F + y\partial_2 F) \neq 0$ **10.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$. **11.** Označme levou stranu $P(x)$. Využijte toho, že fakt, že $x_0$ je jednonásobný kořen $P$ znamená $P(x_0) = 0$ a $P'(x_0) \neq 0$. $\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{x_0^{n-i}}{P'(x_0)}$. (Pro sudé $p$ analogie neplatí, pro liché $p$ zkoumejte $\sqrt[p]{P(x)}$.)

---

## VI. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce $f$ na množině $M$ a vyšetřete, zda těchto hodnot $f$ na $M$ nabývá.

**1.** $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$,
a) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$
**2.** $f(x,y,z) = xyz$,
a) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 0\}$
**3.** $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{(x,y,z); x+y+z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
**4.** $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $M = \{(x,y,z); x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}$, kde $a > 0$.
**5.** $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^p + \cdots + x_n^p$; $M = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 + \cdots + x_n = a,\ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$; kde $a > 0, p > 0$. **6.** $f(x,y) = x + y$, $M = \{(x,y); x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$
**7.** $f(x,y,z) = 10z + x - y$, $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 \leq 1, y + x \geq 0\}$ **8.** $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $M = \{(x,y), \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1\}$ **9.** $f(x,y) = y$, $M = \{(x,y), \left(x^2+y^2\right)^2 = Kxy\}$, kde $K > 0$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) max 3 v $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, min $-3$ v $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(\frac{2}{\sqrt{78}},-\frac{7}{\sqrt{78}},\frac{5}{\sqrt{78}})$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(-\frac{2}{\sqrt{78}},\frac{7}{\sqrt{78}},-\frac{5}{\sqrt{78}})$; **2.** a) max $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$, $(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$; min $-\frac{1}{3\sqrt3}$ v bodech $(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$, $(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$, $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$; b) max $\frac{1}{3\sqrt6}$ v bodech $(\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6})$, $(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6})$, $(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6})$; min $-\frac{1}{3\sqrt6}$ v bodech $(-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})$, $(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})$, $(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6})$; **3.** max $\frac18$ v $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$, inf 0, nenabývá se **4.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6})$, inf $-\infty$ **5.** pro $p=1$ je $f$ na $M$ konstantní; pro $p>1$ je sup $a^p$, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$; pro $p\in(0,1)$ je inf $a^p$, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$; **6.** max 2 v $(1,1)$, min 0 v $(0,0)$ **7.** max $\sqrt{102}$ v $(\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{10}{\sqrt{102}})$; min $-\sqrt{102}$ v $(-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{10}{\sqrt{102}})$; **8.** max $\frac{\sqrt5}{2}$ v $(\frac{\sqrt5}{2},2\sqrt5)$; min $-\frac{\sqrt5}{2}$ v $(-\frac{\sqrt5}{2},-2\sqrt5)$; **9.** max $\frac14\sqrt{k}\cdot 15^{\frac34}$ v $(\frac14\sqrt{k}\sqrt[4]{15},\frac14\sqrt{k}\cdot 15^{\frac34})$; min $-\frac14\sqrt{k}\cdot 15^{\frac34}$ v $(-\frac14\sqrt{k}\sqrt[4]{15},-\frac14\sqrt{k}\cdot 15^{\frac34})$.

==========================================================

## VII. Určete hodnost matic (v závislosti na parametru)

**1.** $\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&4&5&1\\3&6&7&5\\4&8&3&7\end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix}1&2&2&3&5\\6&15&12&25&42\\2&5&4&8&14\\1&-1&2&-4&-7\end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&a\\1&1&a&a^2\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}2(a-1)&(3a+1)&a\\(1-a)&-2&-1\\a&2a&a\end{pmatrix}$

**5.** $\begin{pmatrix}2(a-1)&(3a+1)&a&2a\\(1-a)&-2&-1&2\\a&2a&a&a+1\end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix}1&-1&0&-3\\7&-2&2&-10\\7&-1&1&-9\\2&0&-2&-4\\6&-1&2&-7\end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\a&2&1&2&a\\5&6&7&1&3\\1&2&a&2&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$

### Najděte inverzní matice k následujícím maticím

**8.** $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\2&1&3\end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix}1&2&-3&1\\2&3&-1&2\\7&-1&4&3\\1&1&-2&-1\end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** 3 **2.** 3 **3.** 3 pro $a\neq1$, 1 pro $a=1$ **4.** 3 pro $a\neq 0,-1,2$, jinak 2 **5.** 3 pro $a\neq-1$, 2 pro $a=-1$ **6.** 3 **7.** hodnost 4 pro $a\neq1$, pro $a=1$ hodnost 3 **8.** $\begin{pmatrix}3&-1&3\\-2&1&-2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix}1/2&-1/6&1/6\\1/2&5/6&1/6\\-1/2&-1/6&1/6\end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix}0&-1/21&5/42&11/42\\-1/2&23/42&-5/42&5/21\\-1/2&13/42&-1/42&1/21\\1/2&-5/42&1/21&-25/42\end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix}2&2&2&-3\\-1&-1&-1&2\\1&1&2&-2\\2&1&2&-3\end{pmatrix}$

## VIII. Spočtěte determinanty

**1.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

**5.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

### najděte řešení soustav lineárních rovnic

**8.** $\begin{aligned} x+2y-z&=1 \\ 2x+3y \phantom{-z} &=1 \\ -y+z&=1 \end{aligned}$ **9.** $\begin{aligned} x \phantom{+y} - z&=-2 \\ -x+y \phantom{-z} &=1 \\ 2x+y+3z&=13 \end{aligned}$ **10.** $\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+x_4&=-5 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4&=0 \\ 7x_1-x_2+4x_3-3x_4&=15 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4&=-3 \end{aligned}$

**11.** $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4&=2 \\ x_1 \phantom{+2x_2-x_3} -x_4&=-1 \\ x_2+x_3 &=0 \\ x_1+2x_2 &=-1 \end{aligned}$ **12.** $\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3+3x_4&=5 \\ 6x_1+15x_2+12x_3+25x_4&=42 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+8x_4&=14 \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4&=-7 \end{aligned}$

---

Výsledky a návody. **1.** determinant neexistuje, matice není čtvercová. **2.** 1 **3.** 6 **4.** $-84$ **5.** 1 **6.** 0 **7.** 29400000 **8.** $x=5,\ y=-3,\ z=-2$ **9.** $x=1,\ y=2,\ z=3$ **10.** $(1,0,2,0)$ **11.** $(5,-3,3,6)$ **12.** nekonečně mnoho řešení tvaru $(-3-2t,4,t,0)$, $t\in\mathbb{R}$

---

## IX. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$ **5.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

**6.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **7.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{3k+100}{2k+1}\right)^k$ **8.** $\sum_{k=1}^{\infty}\sin k$ **9.** $\sum_{k=1}^{\infty}\log\cos\frac{1}{k}$

**10.** $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+\sin\frac{1}{k})$ **11.** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$ **12.** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ **13.** $\sum_{k=1}^{\infty}k^{\ln x}$, $x\in\mathbb{R}$

**14.** $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **15.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x\in\mathbb{R}$ **16.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k^2}}{2^k}$, $x\in\mathbb{R}$ **17.** $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$

---

Výsledky a návody. **1.** Diverguje. **2.** Konverguje neabsolutně. **3.** Konverguje absolutně. **4.** Konverguje absolutně. **5.** Konverguje absolutně. **6.** Konverguje absolutně. **7.** Diverguje. **8.** Diverguje. **9.** Konverguje absolutně. **10.** Diverguje. **11.** Konverguje neabsolutně. **12.** Konverguje neabsolutně. **13.** Pro $0<x<\frac{1}{e}$ konverguje absolutně, jinak diverguje (pro $x\le 0$ nemá smysl). **14.** Pro $\alpha>\frac{1}{2}$ konverguje absolutně, jinak diverguje. **15.** Konverguje absolutně pro $x\neq\pm1$, diverguje pro $x=\pm1$. **16.** Konverguje absolutně pro $|x|\le 1$, jinak diverguje. **17.** Konverguje neabsolutně.

---

## X. Vyšetřete konvergenci následujících řad

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^7}{2^k+3^k}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+11}-\sqrt{k+2}\right)$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}-1\right)$

**5.** $\sum_{k=1}^{\infty}k^4x^n$, $x\in\mathbb{R}$ **6.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ **7.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$ **8.** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ **9.** $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)\frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** Konverguje absolutně. **2.** Konverguje absolutně. **3.** Konverguje (neabsolutně). **4.** Konverguje. **5.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| \geq 1$. **6.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, pro $x = 1$ konverguje neabsolutně, pro $x = -1$ diverguje. **7.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, diverguje pro $|x| > 1$. **8.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, konverguje neabsolutně pro $|x| = 1$. **9.** Diverguje.

===

## XI. Nalezněte primitivní funkce na maximálních intervalech existence

**1.** $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sin^7 x \cos x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
**5.** $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
**11.** $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \log x\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ , $a, b \in \mathbb{R}$
**16.** $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

---

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 17\log|x| + C$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **2.** $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x + C$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ **3.** $\frac{1}{8}\sin^8 x + C$ na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ na $\mathbb{R}$ **5.** $-\log|\cos x| + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **6.** $\log|\sin x| + C$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **7.** $\operatorname{tg} x - x + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **8.** $-\operatorname{cotg} x - x + C$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **9.** $\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **10.** $-\log|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})| + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ **11.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ na $\mathbb{R}$ **12.** $(x-1)e^x + C$ na $\mathbb{R}$ **13.** $x\log x - x + C$ na $(0, \infty)$ **14.** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **15.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx + b\sin bx) + C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2 + b^2 \neq 0$; $x + C$ na $\mathbb{R}$, pokud $a = b = 0$ **16.** $\frac{1}{4}|x|x^3 + C$ na $\mathbb{R}$ **17.** $F(x) + C$ na $\mathbb{R}$, kde

$$F(x) = \begin{cases} 2\log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x \in [-\infty, -x_2] \\ -\pi(x + x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [-x_2, -x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x \in [-x_1, x_1] \\ \pi(x - x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x \in [x_1, x_2] \\ 2\log(1+x^2) + \pi(x_2 - x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x \in [x_2, \infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 &= \tfrac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{aligned}$$

===

## XII. Spočtěte primitivní funkce

**1.** $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
**6.** $\int \frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\cdot\sin^3 x}$ **8.** $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **10.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$
**11.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **12.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ **13.** $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$
**15.** $\int \log^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.*** V závislosti na parametru $\alpha > 0$ vypočtěte: (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}$ (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha\cos x)^2}$
**17.*** Spočtěte: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$ (pracné) **18.*** Pro jaký vztah mezi parametry $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci $f$ racionální, je-li $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$?

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\log(x^2+x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **2.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right)-4\log|x-1|$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **3.** $\left(\sum_1^8\frac{1}{2k}x^{2k}\right)-2\log|x-1|+3\log|x+1|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **4.** $x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$ **5.** $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **6.** $\log(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **7.** $\log|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ **8.** $\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right|+\sin 2x\right)$, $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pro $x=\frac{1}{2}\pi+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ je funkce dodefinována 0 **9.** $6\left(\frac{1}{9}u^{(3/2)}-\frac{1}{8}u^{(4/3)}+\frac{1}{7}u^{(7/6)}-\frac{1}{6}u+\frac{1}{5}u^{(5/6)}-\frac{1}{4}u^{(2/3)}\right)$, kde $u=x+1$, $x\in(-1,+\infty)$ **10.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,1)$ **11.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, kde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **12.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ **13.** $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})$ nebo $x\in(1+\sqrt{2},+\infty)$ **14.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt{2}}$, kde $t=\sqrt{x^2+2x+4}-x$, $x\in\mathbb{R}$ **15.** $x\log^2x-2x\log x+2x$, $x\in(0,+\infty)$ **16.** (a) Pro $0<\alpha<1$: $F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$, $x\neq(2n+1)\pi$, $F((2n+1)\pi)=\lim\limits_{x\to(2n+1)\pi}F(x)$ Pro $\alpha>1$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right|$, $x\in(-\arccos(-\frac{1}{\alpha}),\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$ nebo $x\in(\arccos(-\frac{1}{\alpha}),2\pi-\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$, přičemž v bodě $(2k+1)\pi$ je funkce $F$ vždy dodefinována 0 Pro $\alpha=1$: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. (b) Pro $0<\alpha<1$: $G(x)=\frac{1}{1-\alpha^2}\left(F(x)-\frac{\alpha\sin x}{1+\alpha\cos x}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Pro $\alpha=1$: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Pro $\alpha>1$: $G(x)=-(\alpha^2-1)^{-\frac{3}{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right|-\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha-1)^2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right)$, $x\in(-\arccos(-\frac{1}{\alpha}),\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$, nebo $x\in(\arccos(-\frac{1}{\alpha}),2\pi-\arccos(-\frac{1}{\alpha}))+2k\pi$ **17.** $\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3})+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1)+\frac{\sqrt{3}}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **18.** $a+2b+3c=0$