I. Rozviňte následující funkce ve Fourierovu řadu na daných intervalech

1. $\sin x$ a) na $[0,\pi]$, b) na $[-1,1]$, c) na $[0,1]$. **2.** x a) na $[0,1]$, b) v lichou řadu na $[0,1]$, c) v sudou řadu na $[0,1]$. **3.** x^2 a) na $[0,1]$, b) v lichou řadu na $[0,1]$, c) v sudou řadu na $[0,1]$. **4.** $\operatorname{sgn} x$ na $[a,b]$, kde $a<b$.

Výsledky a návody. **1.** a) $\frac{2}{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n\pi}{n^2\pi^2-1}\cdot\sin 1\cdot\sin n\pi x$, c) $1-\cos 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(cos 1-1)}{4\pi^2n^2-1}\cdot\cos 2n\pi x-\frac{4\pi n\sin 1}{4\pi^2n^2-1}\sin 2n\pi x\right)$. **2.** a) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi}\cdot\sin n\pi x$, c) $\frac{1}{2}+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cdot\cos n\pi x$. **3.** a) $\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos 2n\pi x}{n^2\pi^2}-\frac{sin 2n\pi x}{n\pi}\right)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi}-\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x$, c) $\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$. **4.** 1, pokud $a\ge 0$; -1, pokud $b\le 0$; pokud $a<0<b$, pak $\frac{b+a}{b-a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{2n\pi a}{b-a}+\sin\frac{2n\pi b}{b-a}\right)\frac{\cos\frac{2n\pi x}{b-a}}{n\pi}+\left(2-\cos\frac{2n\pi a}{b-a}-\cos\frac{2n\pi b}{b-a}\right)\frac{\sin\frac{2n\pi x}{b-a}}{n\pi}$.

II. FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ A FUNKCE ABSOLUTNĚ SPOJITÉ

1. Nechť funkce f,g mají konečnou variaci na $[a,b]$, a $c\in\mathbb{R}$. Co lze říci o variaci funkcí $f+g$, $f\cdot g$, cf, $\max(f,g)$, $\frac{f}{g}$? **2.** Tytéž otázky pro absolutně spojité funkce.

Zjistěte, zda následující funkce mají konečnou variaci, a zda jsou absolutně spojité pokud to lze, vyjádřete je jako rozdíl dvou neklesajících funkcí

3. $f(x)=\sin x$ a) na $[0,\pi]$, b) na $[0,R]$. **4.** $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x} & x\in(0,1],\\ 0 & x=0.\end{cases}$

5. $f(x)=g(x)\cdot D(x)$, kde D je Dirichletova funkce, t.j. $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q},\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

6. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ na $[0,2\pi]$. **7.** $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ a) na $[c,2\pi-c]$, b) na $[0,2\pi]$.

8. $f(x)=\operatorname{dist}(x,C)$, kde $C\subset[0,1]$ je Cantorovo diskontinuum (nebo jiná množina), na $[-2,2]$.

Výsledky a návody. **1.** Platí $V(f+g)\le V(f)+V(g)$, $V(cf)=|c|V(f)$, $V(f\cdot g)\le V(f)\cdot\sup|g|+V(g)\cdot\sup|f|$, $V(\max(f,g))\le V(f)+V(g)$, $V(\frac{f}{g})\le V(f)\cdot\sup\frac{1}{|g|}+V(g)\cdot\sup|f|\cdot\sup\frac{1}{g^2}$, pokud je g „odražená od nuky“, t.j. pokud $\frac{1}{g}$ je omezená. **2.** $f+g$, $f\cdot g$, cf, $\max(f,g)$ jsou absolutně spojité, $\frac{f}{g}$ také, pokud $\frac{1}{g}$ je omezená. **3.** a) Variace je 2, f je AC, např. proto, že má omezenou derivaci (cos). b) Analogicky jako v a). **4.** Pro $\alpha\le 1$ není BV (z definice). Pro $\alpha>1$ je BV, neboť $\int_0^1|f'|$ konverguje. Z téhož důvodu je AC. Rozklad $f=g-h$, kde např. $g(x)=\int_0^x|f'|$ a $h=\int_0^x(|f'|-f')$. **5.** $V(f,[a,b])=|f(a)|+|f(b)|+2\cdot\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap(a,b)}|g(q)|$, tedy f je BV, právě když $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap(a,b)}|g(q)|<\infty$. f je AC, právě když $g=0$ na $\mathbb{Q}$ (t.j. $f=0$). Rozklad $f=f_1-f_2$, kde např. $f_1(x)=\sum_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q\le x}}|g(q)|$, $f_2=f_1-f$. **6.** f je BV i AC. Např. $f\in\mathcal{C}^1[0,2\pi]$. **7.** f je $\mathcal{C}^1$ na $(0,2\pi)$. Proto a) je BV i AC na $[c,2\pi-c]$. b) Je též BV i AC, neboť má omezenou derivaci na $(0,2\pi)$. **8.** Ukažte, že f je 1-lipschitzovská, a tedy BV i AC.

III. Kurzweilův integrál

1. Nechť $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\}$ je lebesgueovsky nulová množina. Dokažte, že $(K)\int_a^b f(x) = 0$.

2. Nechť $A \subset [0,1]$ je lebesgueovsky měřitelná množina. Spočtěte $(K)\int_0^1 \chi_A$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny A.

3. Pro které množiny $A \subset [0,1]$ existuje Riemannův integrál $(R)\int_0^1 \chi_A$?

4. Existuje $(K)\int_0^1 \chi_A$, pokud $A \subset [0,1]$ je lebesgueovsky neměřitelná?

5. Nechť f je neklesající na $[0,1]$. Existuje $(K)\int_0^1 f$?

6. Najděte funkci, pro kterou existuje $(K)\int_0^1 f$, ale a) neexistuje $(L)\int_0^1 f$, b) neexistuje $(L)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f$ pro malá ε.

7. Najděte funkci f, pro níž existuje $(K)\int_0^1 f$, ale pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in (0,\varepsilon)$, že $(L)\int_\delta^\varepsilon f$ neexistuje.

Výsledky a návody. **1.** Nejdříve dokažte pro f omezenou. Využijte regularitu Lebesgueovy míry (což zde znamená možnost pokrytí nulové množiny otevřenou množinou libovolně malé míry). Pak tento postup použijte pro nulové množiny $\{x : |f(x)| \leq n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$. **2.** $\lambda(A)$ (λ značí Lebesgueovu míru). Využijte regularity Lebesgueovy míry – aproximujte A shora otevřenou a zdola uzavřenou množinou blízké míry. **3.** Právě pro takové, že $[0,1] \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{int}([0,1] \setminus A))$ je lebesgueovsky nulová množina. Nejprve zkoumejte případ, kdy $\operatorname{int} A = \emptyset$, kdy uvedená podmínka znamená $\lambda(\overline{A}) = 0$. **4.** Neexistuje. Využije se Bolzano-Cauchyho podmínka pro Kurzweilův integrál, to, že $\lambda_*(A) < \lambda^*(A)$, a Vitaliova věta o pokrytí. **5.** Existuje. Využijte toho, že množina bodů nespojitosti f je spočetná, BC podmínky a například aproximace po částech konstantní funkcí na velké množině. **6.** a) Například zvolte f, že má neabsolutně konvergentní Newtonův integrál, nebo ji sestrojte na vhodných množinách konstantní s použitím nějaké neabsolutně konvergentní řady. b) Vhodně posuňte funkci z a). **7.** "Slepte" vhodně posloupnost funkcí z předchozího příkladu.

IV. Hilbertovy prostory

1. a) Spočtěte $\min\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^1 \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \mathrm{d}x$, a určete všechny trojice a,b,c, v nichž se minima nabývá. b) Najděte reálnou funkci g, která splňuje $\int_{-1}^1 g(x) = \int_{-1}^1 xg(x) = \int_{-1}^1 x^2 g(x) = 0$, $\int_{-1}^1 |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$ a pro níž je $\int_{-1}^1 x^3 g(x)$ maximální.

2. Stejná úloha jako v předchozím příkladě, jen $a,b,c \in \mathbb{C}$ a g je komplexní.

3. Spočtěte $\min\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^\infty \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$, a určete všechny trojice a,b,c, v nichž se minima nabývá. Zformulujte a zodpovězte otázku analogickou úloze b) v předchozích příkladech.

4. Nechť H je Hilbertův prostor, $M \subset H$ uzavřený podprostor a $x_0 \in H$. Dokažte, že $\min\{\|x-x_0\| \mid x \in M\} = \max\{|(x_0,y)| \mid y \in M^\perp, \|y\| = 1\}$.

5. Nechť $M \subset H$ (H je H-prostor). Co lze říci o množině $(M^\perp)^\perp$?

Test číslo 3

1. (25 bodů) Nechť $f(x) = \operatorname{dist}(x, A) \cdot \operatorname{dist}([x, 0], B)$, kde A je Cantorovo diskontinuum v intervalu $[0, 1]$ a B je graf funkce sin na intervalu $[0, 2\pi]$. (Symbol dist označuje vzdálenost na přímce, respektive v rovině.)
a) Ukažte, že každá z funkcí $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ a $x \mapsto \operatorname{dist}([x, 0], B)$ je lipschitzovská na $[0, 2\pi]$. S jakou konstantou?
b) Je funkce f též lipschitzovská?
c) Co můžete říci o konvergenci Fourierovy řady funkce f na intervalu $[0, 2\pi]$? (Použijte Jordan-Dirichletovo kritérium.)

2. (25 bodů) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ taková, aby $\int_{-1}^{1} |1 - a\cos x - b \sin x|^2 e^x \, dx$ bylo nejmenší.

3. (25 bodů) Nechť $M = \{x = (x_n) \in \ell_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ a $N = \{x = (x_n) \in \ell_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0\}$.
a) Ukažte, že M i N jsou lineární podprostory ℓ_2.
b) Ukažte, že $M^\perp = \{0\}$. Určete $N^\perp$.
c) Je M uzavřený? A co N?

4. (25 bodů) Existuje reálná symetrická matice A, pro níž platí a) $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $e^A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$? Pokud ano, určete ji.