XI. Určete y' a y'' v bodech, v jejichž okolí je uvedenou rovnicí zadána diferencovatelná funkce $y = y(x)$

1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 \quad a \in \mathbb{R}$ **2.** $\log\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **3.** $y - \varepsilon \sin y = x \quad 0 < \varepsilon < 1$
4. $x^y = y^x$ **5.** $y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Zjistěte, v okolí kterých bodů je následujícím předpisem zadána diferencovatelná funkce $z = z(x,y)$ a najděte její parciální derivace prvního a druhého řádu

6. $\frac{x}{z} = \log {}^{z}y$ **7.** $xyz = x + y + z$ **8.** $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0 \quad (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})$ (F je třídy C^2)
9. $F(xz, yz) = 0 \quad (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})$ (F je třídy C^2)
10. Dokažte, že existují funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$, pro které platí $u(1,2) = v(1,2) = 0$, a které na nějakém okolí bodu $(1,2)$ splňují rovnice $xe^{u+v} + 2uv = 1$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^1$. Spočtěte jejich diferenciál v bodě $(1,2)$.
11. Nechť $M = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-1 = 0, x^2+y^2-x = 0\}$. Najděte $a \in M$, aby $P = M \setminus \{a\}$ byla jednorozměrná plocha třídy $\mathcal{C}^1$.
12. Vyšetřete extrémy funkce z zadané implicitně. (a) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10 = 0$ (b) $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2 = 0$ (c) $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$

Výsledky a návody. **1.** $y' = \frac{y+x}{y-x}$, $(x,y) \neq (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}), (\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}})$ **2.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $(x,y) \neq (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}), (-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$ **3.** $y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$ **4.** $y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{x\log y + y}{y \log x + x}$, $(x,y) \neq (e,e)$ **5.** $y' = \frac{y}{x}$ **6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$ s výjimkou bodů $(-\frac{y}{e}, y, \frac{y}{e})$ **7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xz}{xy-1}$ **8.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z-x)(z-y)\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1 F\cdot\partial_2 F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1 F)^2\right) + 2\partial_2 F\cdot(\partial_1 F + 2x\partial_2 F)\cdot(\partial_1 F + 2y\partial_2 F)}{(\partial_1 F + 2z\partial_2 F)^3}$, $(\partial_1 F + 2z\partial_2 F) \neq 0$ **9.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{zy\left(\partial_{11}F\cdot(\partial_2 F)^2 - 2\partial_{12}F\cdot\partial_1 F\cdot\partial_2 F + \partial_{22}F\cdot(\partial_1 F)^2\right) + 2z^2(\partial_1 F)^2}{(x\partial_1 F + y\partial_2 F)^3}$, $(x\partial_1 F + y\partial_2 F) \neq 0$ **10.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$ **11.** $(1,0,0)$

XII. Implicitní funkce a geometrie

1. Nechť x_0 je jednonásobný kořen rovnice $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že kdykoli $|b_i - a_i| < \delta$ pro $i = 1, \ldots, n$, pak rovnice $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ má v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen. Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial a_i}(a_1, \ldots, a_n)$.
2. Najděte rovnice tečny a normálové roviny k parametricky zadaným křivkám
(a) $x = a\cos\alpha\cos t$, $y = a\sin\alpha\cos t$, $z = a\sin t$ v bodě $t = t_0$,
(b) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ v bodě $t = \frac{\pi}{4}$.
3. Najděte rovnice tečny a normálové roviny k implicitně zadaným křivkám
(a) $x^2+z^2 = 10$, $y^2+z^2 = 10$ v bodě $(1,1,3)$, (b) $x^2+y^2+z^2 = 6$, $x+y+z = 0$ v bodě $(1,-2,1)$.
4. Najděte rovnice tečné roviny a normály k plochám
(a) $z = x^2+y^2$ v bodě $(1,2,5)$, (b) $z = y + \log\frac{x}{z}$ v bodě $(1,1,1)$, (c) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ v bodě $(2,2,1)$,
(d) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ v bodě (u_0, v_0).
5. Najděte rovnici tečné a normálové roviny k ploše $e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$ v bodě $(1,1,0,\frac{\pi}{4})$.

Výsledky a návody. **1.** $\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{x_0^{n-i}}{nx_0^{n-1} + (n-1)a_1 x_0^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}$ **2.** (a) tečna: $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$, $y\cos t_0 + z\sin\alpha\sin t_0 = a\sin\alpha$, normálová rovina: $x\cos\alpha\sin t_0 + y\sin\alpha\sin t_0 - z\cos t_0 = 0$, pokud $a \neq 0$. (b) tečna: $y = \frac{b}{2}$, $xc + za = ac$, normálová rovina: $ax - cz = \frac{a^2-c^2}{2}$, pokud $ac \neq 0$. **3.** (a) tečna: $x + y = 2$, $y + z = 4$, normálová rovina: $x - y + z = 3$. (b) tečna: $x - 2y + z = 6$, $x + y + z = 0$, normálová rovina: $x - z = 0$. **4.** (a) tečná rovina: $z = 2x + 4y - 5$, normála: $2x + y = 4$, $4x - 8y + 5z = 13$. (b) tečná rovina: $x - y + 2z = 2$, normála: $x + y = 2$, $-x + y + z = 1$. (c) tečná rovina: $x + y - 4z = 0$, normála: $x - y = 0$, $2x + 2y + z = 9$. (d) tečná rovina: $ax\sin v_0 - ay\cos v_0 + u_0 z = au_0 v_0$, normála: $x\cos v_0 + y\sin v_0 = u_0$, $-xu_0\sin v_0 + yu_0\cos v_0 + az = av_0$, pokud $a \neq 0$ nebo $u_0 \neq 0$. **5.** tečná rovina: $-x + \frac{\pi}{4}\cdot y + u - v = -1$, $-\left(\frac{\pi}{4}+1\right)y + u + v = -1$, normálová rovina: $2y + u + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)v = 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8}$, $-\left(\frac{\pi^2}{4} + \pi + 6\right)x + \frac{\pi}{2}y + \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{3}{4}\pi + 3\right)u - \left(\frac{\pi}{4} + 3\right)v = -\frac{5}{16}\pi^2 + \frac{3}{4}\pi + 6$.

XIII. Ještě implicitní funkce a geometrie

1. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ „v bodě $u=2$, $v=1$“, jestliže $x=u+v^2$, $y=u^2-v^3$, $z=2uv$.
2. Na ploše $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ najděte body, v nichž je tečná rovina rovnoběžná s některou ze souřadnicových rovin.
3. Najděte tečné roviny k ploše $x^2+2y^2+3z^2=1$, které jsou rovnoběžné s rovinou $x+4y+6z=0$.
4. Dokažte, že tečné roviny k ploše $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ určují na osách úseky s konstantním součtem délek.

Najděte křivku, která je společnou tečnou systému křivek (t.j. každý jejíž bod leží na některé křivce ze systému, a jejíž tečna v tomto bodě splývá s tečnou oné křivky ze systému)

5. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, $p=\text{const}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **6.** $(x-a)^2+y^2=\frac{1}{2}a^2$, $a\in\mathbb{R}$ **7.** $y=kx+\frac{a}{k}$, $a=\text{const}$, $k\neq 0$ **8.** $y^2=2px+p^2$, $p\in\mathbb{R}$ **9.** Pro úsečky délky l, jejichž konce jsou na osách.
10. Pro elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ s konstantním obsahem S.

Najděte plochu, která je společnou tečnou k systému ploch.

11. Pro systém sfér o poloměru r se středy na kružnici $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=0$ $(R>r)$.
12. Pro elipsoidy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ s konstantním objemem V.
13. Pro roviny $z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)$, kde x_0,y_0,z_0 jsou konstanty a $p^2+q^2=1$.

Výsledky a návody. **1.** $\frac{26}{121}$ **2.** $(0,\sqrt{8},-\sqrt{8})$, $(0,-\sqrt{8},\sqrt{8})$, $(2,-4,2)$, $(-2,4,-2)$, $(-4,2,0)$, $(4,-2,0)$ **3.** $x+4y+6z=\sqrt{21}$, $x+4y+6z=-\sqrt{21}$ **4.** Součet je a. Návod k dalším příkladům: Nechť F je hladká funkce a pro každé $\alpha\in(a,b)$ je rovnicí $F(x,y,\alpha)=0$ určena hladká křivka. Pak společná tečna $x=x(\alpha)$, $y=y(\alpha)$ musí splňovat $F(x,y,\alpha)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial\alpha}(x,y,\alpha)=0$. Analogicky pro plochy. **5.** $x^2+y^2=p^2$ **6.** $y=x$, $y=-x$ **7.** $y^2=4ax$ pro $a\neq 0$ **8.** Neexistuje **9.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$ **10.** $|xy|=\frac{S}{2\pi}$ **11.** $\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2$ **12.** $|xyz|=\frac{V}{4\sqrt{3}\pi}$ **13.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(z-z_0)^2$

XIV. V následujících úlohách zjistěte sup inf funkce f na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot f na M nabývá.

1. $f(x,y,z)=x-2y+2z$,
a) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1\}$, b) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0\}$
2. $f(x,y,z)=xyz$,
a) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1\}$, b) $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z\ =0\}$
3. $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$, $M=\{(x,y,z); x+y+z=\frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z\ >0\}$
4. $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $M=\{(x,y,z); x+2y+3z=a, x>0, y>0\}$, kde $a>0$.
5. $f(x_1,\dots,x_n)=x_1^p+\dots+\ x_n^p$; $M=\{(x_1,\dots,x_n); x_1+\dots+x_n=a,\ x_1>0,\ \dots, x_n>0\}$; kde $a>0, p>0$. **6.** $f(x,y)=x+y$, $M=\{(x,y); x^3+y^3-2xy=0, x\geq 0, y\geq 0\}$
7. $f(x,y,z)=10z+x-y$, $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2\leq 1, y+x\geq 0\}$ **8.** $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $M=\{(x,y), \frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1\}$ **9.** $f(x,y)=y$, $M=\{(x,y), \left(x^2+y^2\right)^2=Kxy\}$, kde $K>0$
10. Nechť $M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2=x\}$. Dokažte, že funkce $f(x,y,z)=x+y+z$ nebývá maxima na M v bodě (x_0,y_0,z_0), kde z_0 je algebraické číslo.
11. Nechť $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ je reálná symetrická matice. Vyšetřete extrémy kvadratické formy $Q(x)=(Ax,x)$ na jednotkové sféře, a odvoďte odsud, že A má alespoň jedno vlastní číslo.
12. Pomocí věty o multiplikátorech dokažte:
a) nerovnost $\frac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, kde $n\geq 1, x\geq 0, y\geq 0$;
b) nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem;
c) Hölderovu nerovnost: $\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\leq\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$, kde $a_i,b_i\geq 0$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;
d) Hadamardovu nerovnost: $(\det(a_{ij}))^2\leq\prod\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2\right)$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) max 3 v $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, min -3 v $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(\frac{2}{\sqrt{78}},-\frac{7}{\sqrt{78}},\frac{5}{\sqrt{78}})$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(-\frac{2}{\sqrt{78}},\frac{7}{\sqrt{78}},-\frac{5}{\sqrt{78}})$; **2.** a) max $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$; b) max $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$; **3.** max $\frac{1}{8}$ v $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$, inf 0, nenabývá se **4.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6})$, inf $-\infty$ **5.** pro $p=1$ je f na M konstantní; pro $p>1$ je sup a^p, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$; pro $p\in(0,1)$ je inf a^p, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$; **6.** max 2 v $(1,1)$, min 0 v $(0,0)$ **7.** max $\sqrt{102}$ v $(\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{10}{\sqrt{102}}$; min $-\sqrt{102}$ v $(-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{10}{\sqrt{102}}$; **8.** max $\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(\frac{\sqrt{5}}{2},2\sqrt{5})$; min $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(-\frac{\sqrt{5}}{2},-2\sqrt{5})$; **9.** max $\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15},\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}})$; min $-\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(-\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15},-\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}})$; **10.** Dokažte, že maximum se nabývá, a že třetí souřadnice příslušného bodu je kořenem vhodného polynomu. **11.** max je $\lambda_{\max}$, t.j. největší vlastní číslo matice A, a nabývá se ve všech vlastních vektorech jemu příslušných; min je $\lambda_{\min}$, t.j. nejmenší vlastní číslo matice A, a nabývá se ve všech vlastních vektorech jemu příslušných; **12.** a) použijte příklad 5, ev. vyšetřete minimum funkce $\frac{x^n+y^n}{2}$ na množině $\{(x,y),x+y=c,x\ge 0,y\ge 0\}$ pro $c>0$; b) zkoumejte extrémy funkce $\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$ na množině $\{(x_1,\dots,x_n),x_1+\cdots+x_n=c,x_1\ge 0,\dots,x_n\ge 0\}$ pro $c>0$; c) zkoumejte extrémy funkce $f(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)=\sum_{i=1}^n a_ib_i$ na množině $\{(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n),\sum_{i=1}^n a_i^p=A,\sum_{i=1}^n b_i^p=B,a_i\ge 0,b_i\ge 0\}$ pro $A,B>0$, a dokažte, že maximum je v bodech, kde $b_i^q=ca_i^p$ pro vhodné c a všechna i; d) zkoumejte extrémy funkce $(\det(a_{ij}))^2$ (n^2 proměnných) na množině $\{(a_{ij}),\sum_{j=1}^n a_{ij}^2=S_i,i=1,\dots,n\}$, kde $S_i>0$, převeďte na případ $S_i=1$, a pak dokažte, že maximum se nabývá pro ortogonální matice.

XV. Řešte soustavy diferenciálních rovnic

1. $z'+y=0$, $z'-y'=3z+y$ **2.** $z'+z-y=e^x$, $y'-z+y=e^x$ **3.** $5z'-2y'+4z-y=e^{-x}$, $z'+8z-3y=5e^{-x}$ **4.** $z'+3z+y=0$, $y'-z+y=0$, $y(0)=z(0)=1$ **5.** $z'=y-7z$, $y'+2z+5y=0$ **6.** $z'=2y-5z+e^x$, $y'=z-6y+e^{-2x}$ **7.** $z''+y'+z=e^x$, $z'+y''=1$ **8.** $u'=w+v-u$, $v'=w+u-v$, $w'=u+v+w$, $(u(0)=1$, $v(0)=w(0)=0)$ **9.** $u'=v+w$, $v'=u+w$, $w'=u+v$, $(u(0)=-1$, $v(0)=1$, $z(0)=0)$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $z=\frac{3B-A}{4}e^x+\frac{A+B}{4}e^{-3x}$, $y=\frac{A-3B}{4}e^x+\frac{3A+3B}{4}e^{-3x}$ **2.** $z=e^x+de^{-4x}+c$, $y=e^x-de^{-4x}+c$ **3.** $z=-2e^{-x}+ce^x+de^{-2x}$, $y=3e^{-x}+3ce^x+2de^{-2x}$ **4.** $z=-(c+d)xe^{-2x}+de^{-2x}$, $y=(c+d)xe^{-2x}+ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z=-2xe^{-2x}+e^{-2x}$, $y=2xe^{-2x}+e^{-2x}$ **5.** $z=(c-d)e^{-6x}\sin x+de^{-6x}\cos x$, $y=ce^{-6x}\cos x+(c-2d)e^{-6x}\sin x$ **6.** $z=\frac{7}{40}e^x+\frac{1}{5}e^{-2x}+\frac{2}{3}(c+d)e^{-4x}-\frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$, $y=\frac{1}{40}e^x+\frac{3}{10}e^{-2x}+\frac{1}{3}(c+d)e^{-4x}+\frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$ **7.** $z(x)=e^x-\frac{1}{6}x^3-\frac{b+c}{2}x^2+c+dx$, $y=-e^x+\frac{1}{24}x^4+a+bx+\frac{b+c}{6}x^3+\frac{d}{2}x^2$ **8.** $u=\frac{a+b-c}{3}e^{-x}+\frac{a+b+2c}{6}e^{2x}+\frac{a-b}{2}e^{-2x}$, $v=\frac{a+b-c}{3}e^{-x}+\frac{a+b+2c}{6}e^{2x}+\frac{b-a}{2}e^{-2x}$, $w=\frac{c-a-b}{3}e^{-x}+\frac{a+b+2c}{3}e^{2x}$, s poč.podm. $u=\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{6}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v=\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{6}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$, $w=-\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$ **9.** $u=\frac{a+b+c}{3}e^{2x}-\frac{b+c-2a}{3}e^{-x}$, $v=\frac{a+b+c}{3}e^{2x}-\frac{a+c-2b}{3}e^{-x}$, $w=\frac{a+b+c}{3}e^{2x}-\frac{a+b-2c}{3}e^{-x}$ s poč. podm. $u=-e^{-x}$, $v=e^{-x}$, $w=0$

XVI. Diferenciální rovnice

1. Ukažte (na příkladu), že věta o spojité závislosti řešení (lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty) neplatí na neomezeném intervalu (např. $[0,\infty)$).

2. Nechť $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je třídy $\mathcal{C}^1$ a existují konstanty $M, A > 0$ takové, že $\|f(t,u)\| \leq A + M\|u\|$ platí pro všechna $t \geq 0$ a $u \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že potom pro libovolnou počáteční podmínku $y(0) = y_0$ existuje maximální řešení rovnice $y' = f(y,t)$ splňující počáteční podmínku a definované na celém $[0,\infty)$.

3. Uvažujme rovnici $y' = Ay$, kde A je čtvercová matice. Určete, za jakých podmínek na vlastní čísla matice A platí:
(a) Každé řešení má v $+\infty$ limitu 0 (t.j. 0 je stabilní řešení).
(b) Existuje nenulové periodické řešení.
(c) Každé řešení je periodické.

***4.** Uvažujme rovnici $y' = Ay + g(y)$, kde A je čtvercová matice a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1$, která je u nuly „velmi malá“ve smyslu, že $g(0) = 0$ a $g'(0) = 0$. Co lze říci o stabilitě nulového řešení (použijte i předchozí příklad)?

5. Uvažujme rovnici $y'' = f(y)$. Nalezněte funkci $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takovou, že pro každé řešení y naší rovnice je $F(y(t), y'(t))$ konstantní. ($y(t)$ může znamenat výchylku hmotného bodu v čase t, $f(y(t))$ pak sílu působící na něj v čase t, a rovnice $F(y(t), y'(t)) = c$ pak znamená zákon zachování energie.)

6. Aplikujte předchozí příklad na rovnici kyvadla $y'' = \sin y$.

7. Uvažujme rovnici $y'' + \alpha y' + y = 0$. Vyšetřete rozdíl v chování jejích řešení pro $\alpha = 0$ a $\alpha > 0$. Ukažte, že pro $\alpha > 0$ energie systému (ve smyslu předminulého příkladu) s časem klesá (a tedy α má význam tření).

Výsledky a návody. **1.** Např. rovnice $y' = y$. Pak pro dvě různá řešení y_1, y_2 je $\sup_{t\geq 0} |y_1(t) - y_2(t)| = +\infty$ **2.** Použijte větu o existenci maximálního řešení, Gronwallovo lemma a „větu o opouštění kompaktu“. **3.** (a) $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ. (b) $\operatorname{Re}\lambda = 0$ pro nějaké vlastní číslo λ, pro které existuje vlastní vektor $\mathbf{v}$ takový, že $(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{v}$ nemá řešení, t.j. jedna z Jordanových buněk příslušných k λ je 1×1 (chceme-li nekonstantní, pak navíc $\lambda \neq 0$). (c) $\operatorname{Re}\lambda = 0$ pro každé vlastní číslo a navíc existuje báze z vlastních vektorů. **4.** **5.** $F(u,v) = \frac{1}{2}v^2 - g(u)$, kde g je primitivní funkce k f. **6.** $\frac{1}{2}(y')^2 + \cos y =$ const **7.** Pro $\alpha = 0$ jsou řešení periodická, pro $\alpha > 0$ mají v $+\infty$ limitu 0.

Test číslo II/3 – první verze

1. Položme $F(x,y) = x^x - y^y$ pro $x > 0$ a $y > 0$.
(a) Dokažte, že existuje právě jedno $a \in (0, \frac{1}{2})$, pro které platí $F(a, \frac{1}{2}) = 0$. (5 bodů)
(b) Dokažte, že množina $\{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ je v okolí bodu $(a, \frac{1}{2})$ grafem nějaké hladké funkce $y = f(x)$ splňující $f(a) = \frac{1}{2}$. (7 bodů)
(c) Rozhodněte, zda je funkce f na nějakém okolí bodu a rostoucí ev. klesající. (6 bodů)

Řešení. (a) Položme $g(x) = F(x, \frac{1}{2}) = x^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Pak g je funkce spojitá na $(0,\infty)$ a přitom $g(\frac{1}{2}) = 0$ a $\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{x\log x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$. Dále $g'(x) = x^x(\log x + 1)$, tedy g je klesající na $(0, \frac{1}{e})$ a rostoucí na $(\frac{1}{e}, \infty)$. Protože $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, dostáváme $g(x) < 0$ pro $x \in [\frac{1}{e}, \frac{1}{2})$, a tedy existuje jediné $a \in (0, \frac{1}{e})$ splňující $g(a) = 0$, což je totéž, co $F(a, \frac{1}{2}) = 0$.
(b) Použijeme větu o implicitních funkcích. Ověřme její předpoklady. Funkce F je zřejmě třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $(0,,\infty) \times (0,\infty)$, $F(a, \frac{1}{2}) = 0$ z volby a, a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, \frac{1}{2}) = (-y^y(\log y + 1))_{\substack{x=a\\ y=\frac{1}{2}}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\log\frac{1}{2} + 1) \neq 0.$$

Nyní už tvrzení plyne okamžitě z věty o implicitních funkcích.

(c) Funkce f z (b) splňuje na okolí bodu a rovnici $x^x - f(x)^{f(x)} = 0$, zderivujeme-li tuto rovnost, dostaneme

$$x^x(\log x + 1) - f(x)^{f(x)}(\log f(x) \cdot f'(x) + f'(x)) = 0,$$

neboli

$$f'(x) = \frac{x^x(\log x + 1)}{f(x)^{f(x)}(\log f(x) + 1)} = \frac{\log x + 1}{\log f(x) + 1}.$$

Pro poslední rovnost jsme použili, že $x^x = f(x)^{f(x)}$ díky volbě f. Tedy $f'(a) = \frac{\log a+1}{\log \frac{1}{2}+1}$. Přitom $\log \frac{1}{2} + 1 > 0$, neboť $\frac{1}{2} > \frac{1}{e}$, zatímco $\log a + 1 < 0$, neboť $a < \frac{1}{e}$ (viz (a)). Tedy $f'(a) < 0$, a protože f je $\mathcal{C}^1$, je f' spojitá, a tedy $f' < 0$ na nějakém okolí bodu a. Na tomto okolí je pak f klesající.

2. Určete supremum a infimum funkce $f(x, y) = x + y^2$ na množině $M = \{(x, y) \mid x^2 + y < \frac{3}{4}, y \geq -\frac{1}{4}\}$ a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá. (16 bodů)

Řešení. Funkce f je spojitá, dokonce $\mathcal{C}^\infty$ na celém $\mathbb{R}^2$. Množina M je omezená, neboť pro $(x, y) \in M$ nutně platí $-\frac{1}{4} \leq y < \frac{3}{4}$ a $x^2 < 1$. Tedy $\overline{M}$ je kompaktní, a f nabývá extrémů na $\overline{M}$. Hledejme podezřelé body.

Protože $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq 0$, ve vnitřku žádné podezřelé body nejsou. Zbývá vyšetřit hranici. Ta sestává ze dvou částí, z úsečky $y = -\frac{1}{4}, x \in [-1, 1]$ a části paraboly $x^2 + y = \frac{3}{4}, y \geq -\frac{1}{4}$. Na zmíněné úsečce máme $f(x, -\frac{1}{4}) = x + \frac{1}{16}$, což je největší pro $x = 1$ a nejmenší pro $x = -1$, přitom $f(1, -\frac{1}{4}) = \frac{17}{16}$ a $f(-1, -\frac{1}{4}) = -\frac{15}{16}$.

Nyní vyšetřeme chování f na parabole $x^2 + y = \frac{3}{4}$. Protože gradient funkce $x^2 + y - \frac{3}{4}$ je $(2x, 1)$, což nikdy není nulový vektor, podle věty o multiplikátorech dostáváme, že, je-li v (x, y) lokální extrém vzhledem k naší parabole, pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že $1 + \lambda \cdot 2x = 0$ a $2y + \lambda = 0$, tedy $1 - 4xy = 0$, neboli $y = \frac{1}{4x}$. Pokud takový bod leží na naší parabole, platí $x^2 + \frac{1}{4x} = \frac{3}{4}$, neboli $4x^3 - 3x + 1 = 0$. Tato rovnice má kořen $x = -1$ a dvojnásobný kořen $x = \frac{1}{2}$. Pro $x = -1$ dostáváme $y = -\frac{1}{4}$, kterýžto bod už mezi podezřelými body máme. Pro $x = \frac{1}{2}$ dostáváme $y = \frac{1}{2}$ a $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Ještě bychom měli zařadit druhý krajní bod $(1, -\frac{1}{4})$, ale ten již mezi podezřelými body je.

Tedy zřejmě f nabývá na $\overline{M}$ maxima $\frac{17}{16}$ v bodě $(1, -\frac{1}{4})$ a minima $-\frac{15}{16}$ v bodě $(-1, -\frac{1}{4})$. Tato čísla jsou zároveň supremem a infimem funkce f na M, ale f na M těchto hodnot nenabývá.

3. Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic $y' + z = 2y$, $z' + 2z = 3y$. Určete množiny
$S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid y(0) = a, z(0) = b, (y, z) \text{ je řešením } \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} z(x) = 0\}$ a
$U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid y(0) = a, z(0) = b, (y, z) \text{ je řešením } \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} z(x) = 0\}$. (16 bodů)

Řešení. Tato soustava má matici $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Spočtěme její vlastní čísla:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -3 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

tedy vlastní čísla jsou 1 a -1. Vlastní vektor k číslu 1 je například $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a k číslu -1 například $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tedy substitucí $y = u + v$, $z = u + 3v$ dostaneme soustavu $u' = u$, $v' = -v$, jejíž řešení má tvar $u = ce^x$, $v = de^{-x}$, a tak původní soustava má řešení $y = ce^x + de^{-x}$, $z = ce^x + 3de^{-x}$, kde $c, d \in \mathbb{R}$. Přitom zřejmě $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} z(x) = 0$, právě když $c = 0$; a $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} z(x) = 0$, právě když $d = 0$. Navíc $c = \frac{3y(0)-z(0)}{2}$ a $d = \frac{z(0)-y(0)}{2}$, tedy $S = \{(a, b) \mid b = 3a\}$ a $U = \{(a, b) \mid a = b\}$.

Test číslo II/3 – druhá verze

1. Položme $F(x,y) = x^x - y^y$ pro $x > 0$ a $y > 0$.
(a) Dokažte, že existuje právě jedno $b \in (\frac{1}{3}, 1)$, pro které platí $F(\frac{1}{3}, b) = 0$. (5 bodů)
(b) Dokažte, že množina $\{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ je v okolí bodu $(\frac{1}{3}, b)$ grafem nějaké hladké funkce $x = f(y)$ splňující $f(b) = \frac{1}{3}$. (7 bodů)
(c) Rozhodněte, zda je funkce f na nějakém okolí bodu b rostoucí ev. klesající. (6 bodů)

Řešení. (a) Položme $h(y) = F(\frac{1}{3}, y)$ a postupujme analogicky jako v první verzi. h je spojitá, $h(\frac{1}{3}) = 0$, $h(1) < 0$, h roste na $(0, \frac{1}{e})$ a klesá na $(\frac{1}{e}, \infty)$, přičemž $\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < 1$, tedy existuje jediné b dle zadání, navíc $b \in (\frac{1}{e}, 1)$.

(b) Jako v první verzi: F je $\mathcal{C}^\infty$, $F(\frac{1}{3}, b) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{1}{3}, b) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} (\log \frac{1}{3} + 1) \neq 0$.

(c) Stejně jako v první verzi spočteme, že $f'(a) = \frac{\log b + 1}{\log \frac{1}{3} + 1}$, tentokrát $\log b + 1 > 0$ a $\log \frac{1}{3} > 0$, tedy f je klesající na okolí b.

2. Určete supremum a infimum funkce $f(x,y) = x^2 + y$ na množině
$M = \{(x,y) \mid x + y^2 < \frac{3}{4}, x \geq 0\}$ a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá. (16 bodů)

Řešení. Podobně jako v první verzi M je omezená, a tedy $\overline{M}$ je kompaktní. Protože $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, nejsou extrémy uvnitř, zbývá hranice. Hranice je tvořena opět úsečkou a částí paraboly. Na parabole najdeme opět podezřelé body $(-\frac{1}{4}, 1)$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ten první neleží v $\overline{M}$, pro druhý platí $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Úsečka má tvar $x = 0$, $y \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $f(0,y) = y$, tedy největší hodnota je v $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a nejmenší v $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Tedy supremum je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a infimum $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, přičemž žádné z těchto hodnot f na M nenabývá.

3. Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic $y' + y = 4z$, $z' - 2y = z$. Určete množiny
$S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid y(0) = a, z(0) = b, (y,z) \text{ je řešením } \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} z(x) = 0\}$ a
$U = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid y(0) = a, z(0) = b, (y,z) \text{ je řešením } \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} z(x) = 0\}$. (16 bodů)

Řešení. Tato soustava má matici $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Spočtěme její vlastní čísla:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 - 8 = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3),$$

tedy vlastní čísla jsou 3 a -3. Vlastní vektor k číslu 3 je například $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a k číslu -3 například $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tedy substitucí $y = u + 2v$, $z = u - v$ dostaneme soustavu $u' = 3u$, $v' = -3v$, jejíž řešení má tvar $u = ce^{3x}$, $v = de^{-3x}$, a tak původní soustava má řešení $y = ce^{3x} + 2de^{-3x}$, $z = ce^{3x} - de^{-3x}$, kde $c, d \in \mathbb{R}$. Přitom zřejmě $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} z(x) = 0$, právě když $c = 0$; a $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} z(x) = 0$, právě když $d = 0$. Navíc $c = \frac{y(0) + 2z(0)}{3}$ a $d = \frac{y(0) - z(0)}{3}$, tedy $S = \{(a,b) \mid a = -2b\}$ a $U = \{(a,b) \mid a = b\}$.

XVII. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ **2.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ **3.** $y'' - 6y' + 13 = 0$ **4.** $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$
5. $y'' - 2y' + 2y = \cos x$ **6.** $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$ **7.** $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$
8. $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$ **9.** $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$ **10.** $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
11. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}$ **12.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$ **13.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$

XVIII. Trigonometrické a Fourierovy řady

1. (a) Sečtěte trigonometrickou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$. (b) Spočtěte $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$

2. Sečtěte trigonometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$, kde $0 < q < 1$. Je tato řada Fourierovou řadou svého součtu?

3. Pro následující funkce najděte trigonometrickou řadu, jejímž jsou součtem, a výsledek aplikujte v uvedených bodech. (a) x^2 na $(-\pi, \pi)$, $x = 0$; (b) x na $(-\pi, \pi)$, $x = \frac{\pi}{2}$; (c) $\sin ax$ na $(-\pi, \pi)$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$, $x = \frac{\pi}{2}$; (d) x^2 na $(0, 2\pi)$, $x = 0$.

4. (a) Napište funkci $f(x) = x$ na $(0, \pi)$ jako součet cosinové řady.
(b) Napište funkci $f(x) = x^2$ na $(-\pi, 0)$ jako součet sinové řady.

5. Dokažte, že pro $|x| < 1$ platí $\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$. (Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci $\cos \alpha x$ na $(-\pi, \pi)$, aplikujte pro $x = \pi$, vyjádřete $\operatorname{cotg} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi}$ a výslednou rovnost integrujte.)

Test číslo II/4 – první verze

1. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$$y''' - y'' + 4y' - 4y = \sin x + \sin 2x \qquad \text{(18 bodů)}$$

Řešení. Charakteristický polynom této rovnice je

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda - 1),$$

tedy má tři různé kořeny 1, $2i$, $-2i$, tudíž fundamentální systém homogenní rovnice tvoří funkce e^x, $\cos 2x$, $\sin 2x$. Pravá strana je součtem dvou kvazipolynomů ($\sin x$ a $\sin 2x$), a tedy hledejme partikulární řešení y_1 rovnice $y''' - y'' + 4y' - 4y = \sin x$ a partikulární řešení y_2 rovnice $y''' - y'' + 4y' - 4y = \sin 2x$. Protože i není kořenem charakteristického polynomu, má y_1 tvar $y_1 = a\cos x + b\sin x$ pro nějaké konstanty a, b. Pak platí

$$\begin{aligned} y_1 &= a\cos x + b\sin x, & y_1' &= -a\sin x + b\cos x, \\ y_1'' &= -a\cos x - b\sin x, & y_1''' &= a\sin x - b\cos x, \end{aligned}$$

a tedy

$$y_1''' - y_1'' + 4y_1' - 4y_1 = (-b + a + 4b - 4a)\cos x + (a + b - 4a - 4b)\sin x = 3(b - a)\cos x - 3(a + b)\sin x,$$

odkud dostáváme
$$3(b - a) = 0, \quad -3(a + b) = 1, \text{ neboli } \quad a = b = -\frac{1}{6}.$$

Protože $2i$ je kořenem charakteristického polynomu násobnosti 1, má y_2 tvar $y_2 = x \cdot (c\cos 2x + d\sin 2x)$ pro nějaké konstanty c, d. Pak platí:

$$\begin{aligned} y_2 &= x(c\cos 2x + d\sin 2x), & y_2' &= x(-2c\sin 2x + 2d\cos 2x) + (c\cos 2x + d\sin 2x), \\ y_2'' &= x(-4c\cos 2x - 4d\sin 2x) + 2(-2c\sin 2x + 2d\cos 2x), & y_2''' &= x(8c\sin 2x - 8d\cos 2x) + 3(-4c\cos 2x - 4d\sin 2x), \end{aligned}$$

a tedy

$$y_2''' - y_2'' + 4y_2' - 4y_2 = (-12c - 4d + 4c)\cos 2x + (-12d + 4c + 4d)\sin 2x = -4(2c + d)\cos 2x + 4(c - 2d)\sin 2x,$$

odkud dostáváme

$$-4(2c + d) = 0, \quad 4(c - 2d) = 1, \text{ neboli } d = -\frac{1}{10}, \ c = \frac{1}{20}.$$

Obecné řešení naší rovnice má tedy tvar

$$y = \frac{x}{20}(\cos 2x - 2\sin 2x) - \frac{1}{6}(\sin x + \cos x) + Ae^x + B\cos 2x + C\sin 2x, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

2. Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 3(n+\frac{1}{2})x}{(2n+1)!}$. (14 bodů)

Řešení. Platí $\cos 3(n+\frac{1}{2})x = \operatorname{Re} e^{3(n+\frac{1}{2})ix}$, a tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 3(n+\frac{1}{2})x}{(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{Re} e^{3(n+\frac{1}{2})ix}}{(2n+1)!} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{3(n+\frac{1}{2})ix}}{(2n+1)!} \\
&= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(e^{\frac{3}{2}ix}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{Re} \sin\left(e^{\frac{3}{2}ix}\right) = \operatorname{Re} \sin\left(\cos\frac{3}{2}x + i\sin\frac{3}{2}x\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sin\left(\cos\frac{3}{2}x\right)\cos\left(i\sin\frac{3}{2}x\right) + \cos\left(\cos\frac{3}{2}x\right)\sin\left(i\sin\frac{3}{2}x\right)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sin\left(\cos\frac{3}{2}x\right) \cdot \frac{e^{-\sin\frac{3}{2}x} + e^{\sin\frac{3}{2}x}}{2} + \cos\left(\cos\frac{3}{2}x\right) \cdot \frac{e^{-\sin\frac{3}{2}x} - e^{\sin\frac{3}{2}}}{2i}\right) \\
&= \sin\left(\cos\frac{3}{2}x\right) \cdot \frac{e^{-\sin\frac{3}{2}x} + e^{\sin\frac{3}{2}x}}{2}
\end{aligned}$$

Použili jsme rozvoj funkce sin v mocninnou řadu a vzorečky $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, které platí pro všechna komplexní z.

3. Položme $f(x) = \cos^3 x + \operatorname{sgn}(x-1)$.

(a) Rozviňte f ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. (10 bodů)

(b) Určete součet řady z (a) všude, kde řada konverguje. (8 bodů)

Řešení. (a) Z definice Fourierových koeficientů je zřejmé, že Fourierovy koeficienty funkce f jsou součtem Fourierových koeficientů funkcí $\cos^3 x$ a $\operatorname{sgn}(x-1)$. Nejprve se věnujme první funkci. Podle goniometrických vzorečků platí

$$\begin{aligned}
\cos^3 x = \cos x \cdot \frac{\cos 2x - 1}{2} &= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cdot \cos 2x \\
&= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x,
\end{aligned}$$

což je zároveň rozvoj funkce $\cos^3 x$ ve Fourierovu řadu (výraz vpravo je konečná (a tedy např. stejnoměrně konvergentní) trigonometrická řada, a proto je Fourierovou řadou svého součtu).

Dále počítejme koeficienty a_n', b_n' funkce $\operatorname{sgn}(x-1)$.

$$\begin{aligned}
a_0' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{1} -1\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}(-(1+\pi) + (\pi-1)) = -\frac{2}{\pi} \\
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x-1)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{1} -\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{1} + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{1}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin n}{n} - \frac{\sin n}{n}\right) = -\frac{2\sin n}{n\pi} \quad \text{pro} \quad n \geq 1 \\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x-1)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{1} -\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{1} + \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{1}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\cos n}{n}\right) \\
&= \frac{2(\cos n - (-1)^n)}{n\pi} \quad \text{pro} \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

Tedy Fourierova řada funkce f má tvar:

$$-\frac{1}{\pi}-\left(\frac{2}{\pi}\sin 1+\frac{1}{4}\right)\cos x+\frac{2}{\pi}(\cos 1+1)\sin x-\frac{1}{\pi}\sin 2\cos 2x+\frac{1}{\pi}(\cos 2-1)\sin 2x$$
$$-\left(\frac{2}{3\pi}\sin 3-\frac{1}{4}\right)\cos 3x+\frac{2}{3\pi}(\cos 3+1)\sin 3x+\sum_{n=4}^{\infty}\left(-\frac{2\sin n\cos nx}{n\pi}+\frac{2(\cos n-(-1)^n)\sin nx}{n\pi}\right)$$

(b) Součet Fourierovy řady funkce $\cos^3 x$ je zase $\cos^3 x$, protože tato řada je konečná (tedy je to vlastně trigonometrický polynom). Dále si všimněme funkce $\operatorname{sgn}(x-1)$. Pokud $x\in(-\pi,1)\cup(1,\pi)$, je na okolí bodu x funkce $\operatorname{sgn}(x-1)$ konstantní, a tedy spojitá a navíc má konečnou variaci (je dokonce monotónní), a proto podle Jordan-Dirichletova kritéria Fourierova řada konverguje k funkční hodnotě. V bodech 1 a π lze rovněž použít Jordan-Dirichletovo kritérium, funkce je na okolí monotónní (a tedy má konečnou variaci), a proto součtem Fourierovy řady je aritmetický průměr limity zleva a limity zprava, což je v obou případech 0 (v bodě 1 je to zřejmé, v bodě π se počítají limity funkce periodicky dodefinované). Protože součet Fourierovy řady je funkce 2π-periodická, plyne z řečeného, že Fourierova řada má součet v každém bodě, a tento se rovná

$$\begin{array}{rl}\cos^3 x+\operatorname{sgn}(x-2k\pi-1), & x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi),k\in\mathbb{Z}\\ -1, & x=(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}$$

Test číslo II/4 – druhá verze

1. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice
$y'''+y''+4y'+4y=\cos x+\cos 2x$ (18 bodů)

Řešení. Charakteristický polynom této rovnice je

$$\lambda^3+\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda^2+4)(\lambda+1),$$

tedy má tři různé kořeny -1, $2i$, $-2i$, tudíž fundamentální systém homogenní rovnice tvoří funkce e^{-x}, $\cos 2x$, $\sin 2x$. Pravá strana je součtem dvou kvazipolynomů ($\cos x$ a $\cos 2x$), a tedy hledejme partikulární řešení y_1 rovnice $y'''+y''+4y'+4y=\cos x$ a partikulární řešení y_2 rovnice $y'''+y''+4y'+4y=\cos 2x$. Protože i není kořenem charakteristického polynomu, má y_1 tvar $y_1=a\cos x+b\sin x$ pro nějaké konstanty a, b. Pak platí

$$\begin{aligned} y_1&=a\cos x+b\sin x, & y_1'&=-a\sin x+b\cos x,\\ y_1''&=-a\cos x-b\sin x, & y_1'''&=a\sin x-b\cos x,\end{aligned}$$

a tedy

$$y_1'''+y_1''+4y_1'+4y_1=(-b-a+4b+4a)\cos x+(a-b-4a+4b)\sin x=3(b+a)\cos x+3(b-a)\sin x,$$

odkud dostáváme

$$3(b+a)=1,\quad 3(b-a)=0,\ \text{neboli}\quad a=b=\frac{1}{6}.$$

Protože $2i$ je kořenem charakteristického polynomu násobnosti 1, má y_2 tvar $y_2=x\cdot(c\cos 2x+d\sin 2x)$ pro nějaké konstanty c, d. Pak platí:

$$\begin{aligned} y_2&=x(c\cos 2x+d\sin 2x), & y_2'&=x(-2c\sin 2x+2d\cos 2x)+(c\cos 2x+d\sin 2x),\\ y_2''&=x(-4c\cos 2x-4d\sin 2x)+2(-2c\sin 2x+2d\cos 2x), & y_2'''&=x(8c\sin 2x-8d\cos 2x)+3(-4c\cos 2x-4d\sin 2x),\end{aligned}$$

a tedy

$$y_2'''-y_2''+4y_2'-4y_2=(-12c+4d+4c)\cos 2x+(-12d-4c+4d)\sin 2x=-4(2c-d)\cos 2x-4(c+2d)\sin 2x,$$

odkud dostáváme

$$-4(2c-d)=1,\quad -4(c+2d)=0,\ \text{neboli}\ d=\frac{1}{20},\ c=-\frac{1}{10}.$$

Obecné řešení naší rovnice má tedy tvar

$$y=\frac{x}{20}(\sin 2x-2\cos 2x)+\frac{1}{6}(\sin x+\cos x)+Ae^{-x}+B\cos 2x+C\sin 2x,\qquad A,B,C\in\mathbb{R}.$$

2. Sečtěte řadu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 3nx}{(2n)!}$. (14 bodů)

Řešení. Platí $\sin 3nx=\operatorname{Im}e^{3nix}$, a tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 3nx}{(2n)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{Im}e^{3nix}}{(2n)!}=\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{3nix}}{(2n)!}=\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(e^{\frac{3}{2}ix}\right)^{2n}}{(2n)!}\\
&=\operatorname{Im}\cos\left(e^{\frac{3}{2}ix}\right)=\operatorname{Im}\cos\left(\cos\frac{3}{2}x+i\sin\frac{3}{2}x\right)\\
&=\operatorname{Im}\left(\cos\left(\cos\frac{3}{2}x\right)\cos\left(i\sin\frac{3}{2}x\right)-\sin\left(\cos\frac{3}{2}x\right)\sin\left(i\sin\frac{3}{2}x\right)\right)\\
&=\operatorname{Im}\left(\cos\left(\cos\frac{3}{2}x\right)\cdot\frac{e^{-\sin\frac{3}{2}x}+e^{\sin\frac{3}{2}x}}{2}-\sin\left(\cos\frac{3}{2}x\right)\cdot\frac{e^{-\sin\frac{3}{2}x}-e^{\sin\frac{3}{2}x}}{2i}\right)\\
&=\sin\left(\cos\frac{3}{2}x\right)\cdot\frac{e^{-\sin\frac{3}{2}x}-e^{\sin\frac{3}{2}x}}{2}
\end{aligned}$$

Použili jsme rozvoj funkce cos v mocninnou řadu a vzorečky $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, které platí pro všechna komplexní z.

3. Položme $f(x)=\sin^3 x-\operatorname{sgn}(x+1)$.

(a) Rozviňte f ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$. (10 bodů)

(b) Určete součet řady z (a) všude, kde řada konverguje. (8 bodů)

Řešení. (a) Z definice Fourierových koeficientů je zřejmé, že Fourierovy koeficienty funkce f jsou rozdílem Fourierových koeficientů funkcí $\sin^3 x$ a $\operatorname{sgn}(x+1)$. Nejprve se věnujme první funkci. Podle goniometrických vzorečků platí

$$\begin{aligned}
\sin^3 x&=\sin x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos 2x\\
&=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x,
\end{aligned}$$

což je zároveň rozvoj funkce $\sin^3 x$ ve Fourierovu řadu (výraz vpravo je konečná (a tedy např. stejnoměrně konvergentní) trigonometrická řada, a proto je Fourierovou řadou svého součtu).

Dále počítejme koeficienty a_n', b_n' funkce $\operatorname{sgn}(x+1)$.

$$\begin{aligned}
a_0'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{-1}-1\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{\pi}1\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}(-(-1+\pi)+(\pi+1))=\frac{2}{\pi}\\
a_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{-1}-\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{-1}+\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-1}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin(-n)}{n}-\frac{\sin(-n)}{n}\right)=\frac{2\sin n}{n\pi}\quad\text{pro}\quad n\geq 1\\
b_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{-1}-\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{-1}+\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-1}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(-n)}{n}-\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\cos(-n)}{n}\right)\\
&=\frac{2(\cos n-(-1)^n)}{n\pi}\quad\text{pro}\quad n\geq 1
\end{aligned}$$

Tedy Fourierova řada funkce f má tvar:

$$-\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sin 1\cos x+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi}(\cos 1+1)\right)\sin x-\frac{1}{\pi}\sin 2\cos 2x-\frac{1}{\pi}(\cos 2-1)\sin 2x$$
$$-\frac{2}{3\pi}\sin 3\cos 3x+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3\pi}(\cos 3+1)\right)\sin 3x-\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{2\sin n\cos nx}{n\pi}+\frac{2(\cos n-(-1)^n)\sin nx}{n\pi}\right)$$

(b) Ze stejných důvodů jako v první verzi dostaneme, že Fourierova řada konverguje ve všech bodech a má součet

$$\begin{array}{rl} \sin^3 x-\operatorname{sgn}(x-2k\pi+1), & x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi), k\in\mathbb{Z} \\ 0, & x=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}$$

XIX. Ještě trigonometrické a Fourierovy řady

1. Rozviňte následující funkce ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$ a určete součet, všude, kde řada konverguje. (a) $\cos^{2m} x$, (b) $\frac{\sin mx}{\sin x}$, (c) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\alpha^m\frac{\sin mx}{\sin x}$, kde $|\alpha|<1$, (d) $\frac{1}{\sin x}$.

2. Je trigonometrická řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$ Fourierovou řadou nějaké funkce (např. svého součtu)?

3. Pro následující funkce určete, v kterých bodech konverguje jejich Fourierova řada, a jaký má součet.
(a) $\operatorname{sgn}\sin 100x$, (b) $\sin\frac{1}{x}$, $x\in(-\pi,\pi)$, (c) $\operatorname{dist}(x,C)$, $x\in(0,2\pi)$, kde C je Cantorovo diskontinuum.

4. Sečtěte řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$. (Použijte Parsevalovu rovnost pro $\chi_{[-\alpha,\alpha]}$, $|\alpha|\le\pi$.)