I. Řešte nerovnice a množinu řešení nakreslete

1. $||x-2|+1| \le 5$ **2.** $xy \ge 1,\ y \le \sin x$ **3.** $(x^2-y^2)\sin x \ge 0$ **4.** $|x+1|+|x-2| \le 4$
5. $|x^2-4x+3| \le |x^2-4|$ **6.** $\frac{x-1}{x+2} < \frac{x}{x+1}+1$ **7.** $\sqrt{x^2+2x-3} \ge \sqrt{x^2+3x-4}$
8. $\cos x \le \sin x$ **9.** $\cos^2 x > \sin^2 x$ **10.** $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x+3\right) \ge 0$ **11.** $1 \le |ax+1| < 2,\ a \in \mathbb{R}$
12. $ax^2+bx+c \ge 0,\ a,b,c \in \mathbb{R}$ **13.** Pro která $x \in \mathbb{R}$ neplatí nerovnost $|1+x\sqrt{a}| \le 2ax^2$ pro žádné $a \in \mathbb{R}$? **14.** Určete množinu $\{a \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| \le 1 \Rightarrow x^2-ax > 5)\}$

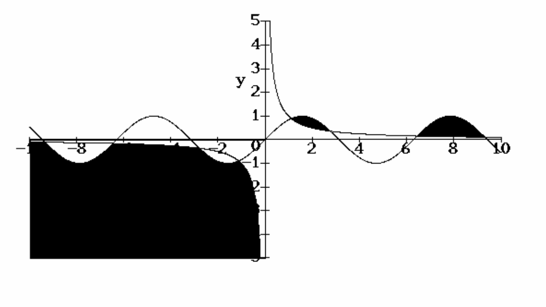
Dokažte indukcí

15. $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$ **16.** 10^n-4 je dělitelné 6 pro každé $n \in \mathbb{N}$ **17.** $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 2\sqrt{n}$
18. $(1+x)^n \ge 1+nx,\ n \in \mathbb{N}, x \ge -1$ **19.** $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n),\ a_1,\ldots,a_n \ge 0$
20. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ **21.** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **22.** $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{n}{2}x \sin\frac{n+1}{2}x$
23. $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ **24.** $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},\ n > 1$ **25.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
26. $\left|\sin\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k,\ x_1,\ldots,x_n \in [0,\pi]$ **27.** $2^n \ge n^2,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{3\}$

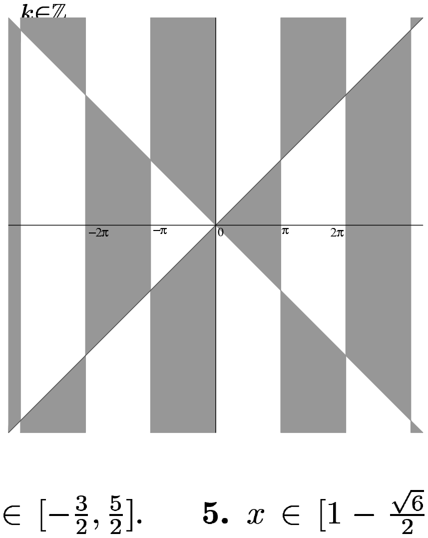
Zjistěte, zda platí následující výroky, a napište jejich negaci

28. $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(y > x)$ **29.** $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})(y > x)$
30. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})(x = y+z)$ **31.** $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x = y+z)$
32. $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R})(|a-b+c| \ge |a|-|b|-|c|)$
33. $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \in (a,a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$
34. $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x \in (a,a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$

Výsledky a návody. **1.** $x \in [-2,8]$. **2.**



3. $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi,(2k+1)\pi]$ a $|y| \le |x|$; nebo $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ a $|y| \ge |x|$.



4. $x \in [-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$. **5.** $x \in [1-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{7}{4}] \cup [1+\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$. **6.** $x \in (-\infty,\frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \cup (-2,-1) \cup (\frac{-5+\sqrt{13}}{2},+\infty)$. **7.** $x \in (-\infty,-4] \cup \{1\}$. **8.** $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi]$. **9.** $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi]$. **10.** $x \in [1,2]$. **11.** Pro $a=0$ je $x \in \mathbb{R}$, pro $a \ne 0$ je $x \in (-\frac{1}{a}-\frac{2}{|a|},-\frac{1}{a}-\frac{1}{|a|}] \cup [-\frac{1}{a}+\frac{1}{|a|},-\frac{1}{a}+\frac{2}{|a|})$. **12.** $a=b=0, c \ge 0$ – $x \in \mathbb{R}$; $a=b=0, c<0$ – žádné řešení; $a=0, b>0$ – $x \in [-\frac{c}{b},+\infty)$; $a=0, b<0$ – $x \in (-\infty,-\frac{c}{b}]$; $a>0, b^2-4ac \le 0$ – $x \in \mathbb{R}$; $a>0, b^2-4ac>0$ – $x \in (-\infty,\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}] \cup [\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},+\infty)$; $a<0, b^2-4ac<0$ – žádné řešení; $a<0, b^2-4ac=0$ –

$x=-\frac{b}{2a}$; $a<0, b^2-4ac>0$ – $x\in[\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}]$. **13.** Pro $x=0$. **14.** $(-\infty,-4)$. **28.** Platí, negace: $(\exists x\in\mathbb{N})(\forall y\in\mathbb{N})(y\le x)$. **29.** Neplatí, negace $(\forall y\in\mathbb{N})(\exists x\in\mathbb{N})(y\le x)$. **30.** Platí, negace $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{R})(x\ne y+z)$. **31.** Neplatí, negace $(\exists x\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})(x\ne y+z)$. **32.** Platí, negace $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})(\exists z\in\mathbb{R})(|a-b+c|>|a|-|b|-|c|)$. **33.** Platí, negace $(\exists a\in\mathbb{R})(\forall\varepsilon>0)(\forall\alpha\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R})(x\in(a,a+\varepsilon)\Leftrightarrow|x-\alpha|\ge 1)$ **34.** Platí, negace $(\forall a\in\mathbb{R})(\exists\varepsilon>0)(\exists\alpha\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(x\in(a,a+\varepsilon)\Leftrightarrow|x-\alpha|\ge 1)$

II. Zobrazení

1. Nechť $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Nalezněte D_f, H_f, f^{-1}.

2. Nechť $\varphi :< 0,\infty) \to < 1,\infty)$ je bijekce (tj. zobrazení prosté a na) a $\psi(x)=\sqrt{\varphi^2(x)-1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1}, a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Co je $D_{\psi^{-1}}$?

3. Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z+2\bar{z}$, $g(z)=a(2\bar{z}-z)$. Existuje $a\in\mathbb{C}$, pro které $g=f^{-1}$?

4. Vyšetřete z hlediska monotonie (bez užití derivace) následující funkce a načrtněte jejich graf:
a) $f(x)=\frac{3x+2}{2x-3}$ *c)* $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$
b) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ *d)* $f(x)=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$

5. Zapište co nejjednodušší předpis pro funkce $f\circ f$ a $f\circ f\circ f$, pokud f je funkce z bodů a), b) předchozího příkladu, nebo c) $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Určete vždy definiční obor a obor hodnot.

6. Nechť $f:X\to Y$, $A,B\subset X$. Platí obecně a) $f(A)\cup f(B)=f(A\cup B)$; b) $f(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$; c) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$; d) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$?
Pokud nějaké z uvedených tvrzení neplatí, charakterizujte funkce, pro které platí. Jak je to v případě, že $A,B\subset Y$ a místo f píšeme v a)–d) f^{-1}?

7. Charakterizujte zobrazení $f:M\to L$, pro která platí
a) $(\forall A\subset M)(f^{-1}(f(A))=A)$; b) $(\forall B\subset L)(f(f^{-1}(B))=B)$.

8. Platí výrok $(\exists M\subset\mathbb{R})(\exists! f:M\to\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(x\ne 0\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=g(x))$,
je-li *a)* $g(x)=\sin x+\sin\frac{1}{x}$, *b)* $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, *c)* $g(x)=\frac{x^{16}+1}{x^8}$?
Pokuste se charakterizovat všechny funkce g, pro které uvedený výrok platí.

9. Platí výroky (1) $(\exists M\subset\mathbb{R})(\exists! f:M\to\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(f(x^2-2x)=g(x))$,
(2) $(\exists M\subset\mathbb{R})(\exists! f:M\to\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(f(x-|x|)=g(x))$,
je-li *a)* $g(x)=\cos(1-x)$, *b)* $g(x)=\sin(1-x)$ *c)* $g(x)=\max(x,0)$,
d) $g(x)=\max(-x,0)$?
Pokuste se charakterizovat všechny funkce g, pro které uvedené výroky platí.

Výsledky a návody. **1.** $D_f=[0,16)\cup(16,+\infty)$, $H_f=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$, $f^{-1}(y)=\frac{16y^2}{(y+2)^2}$, $y\in H_f$. **2.** $D_{\psi^{-1}}=H_\psi=[0,\infty)$, $\psi^{-1}(y)=\varphi^{-1}(\sqrt{y^2+1})$. **3.** Ano, $a=\frac{1}{3}$. **4.** a) f klesá na $(-\infty,\frac{3}{2})$ a na $(\frac{3}{2},\infty)$; b) f roste na $(-\infty,-1]$, klesá na $[-1,0)$ a na $(0,1]$, roste na $[1,+\infty)$ (zkoumejte znaménko $f(x_1)-f(x_2)$); c) roste na každém z intervalů $[-\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\frac{1}{3}\pi+2k\pi]$, klesá na každém z intervalů $[\frac{1}{3}\pi+2k\pi,\frac{4}{3}\pi+2k\pi]$ pro $k\in\mathbb{Z}$ (vyjádřete s použitím součtového vzorce); d) roste na každém z intervalů $[-\frac{1}{6}\pi+k\pi,\frac{1}{3}\pi+k\pi]$, klesá na každém z intervalů $[\frac{1}{3}\pi+k\pi,\frac{5}{6}\pi+k\pi]$ pro $k\in\mathbb{Z}$ (vyjádřete pomocí dvojnásobného argumentu a součtového vzorce). **5.** a) $(f\circ f)(x)=x$, $f\circ f\circ f=f$, definiční obor i obor hodnot je ve všech třech případech $\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$; b) $(f\circ f)(x)=\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}$, $(f\circ f\circ f)(x)=\frac{x^8+7x^6+13x^4+7x^2+1}{x(x^2+1)(x^4+3x^2+1)}$, $D_f=D_{f\circ f}=D_{f\circ f\circ f}\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $H_f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, $H_{f\circ f}=(-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[\frac{5}{2},\infty)$, $H_{f\circ f\circ f}=(-\infty,-\frac{29}{10}]\cup[\frac{29}{10},\infty)$; c) $(f\circ f)(x)=\frac{x+1}{x+2}$, $(f\circ f\circ f)(x)=\frac{x+2}{2x+3}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $H_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$, $H_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$, $D_{f\circ f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-\frac{3}{2},-1\}$, $H_{f\circ f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$. **6.** Vždy platí a),c); tvrzení b),d) platí právě když f je prosté zobrazení. Pro f^{-1} platí vše. **7.** a) Prostá zobrazení; b) zobrazení na. **8.** a) Ano, b) ne, c) ano. Jsou to ty funkce, pro něž platí $g(x)=g(\frac{1}{x})$ pro každé $x\ne 0$. **9.** (1) a) Ano, b),c),d) ne. Jsou to ty funkce, pro něž platí $g(x)=g(2-x)$ pro všechna x. (2) a),b),c) Ne, d) ano. Jsou to ty funkce, které jsou konstantní na $[0,+\infty)$.

III. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

1. $A=\{p/(p+q);\ p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}\}$, **2.** a) $B_1=\{\sin x;\ x\in\langle 0,2\pi\rangle\}$, b) $B_2=\{\sin x;\ x\in(0,2\pi)\}$, c) $B_3=\{\sin x;\ x\in(0,\pi)\}$, **3.** a) $C_1=\{n^2-m^2;\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}\}$, b) $C_2=\{n^2-m^2;\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}, n>m\}$, c) $C_3=\{n^2-m^2;\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}, n\le m\}$, **4.** a) $D_1=\{2^{-n}+3^{-n};\ n\in\mathbb{N}\}$, $D_2=\{2^{-n}+3^{-n};\ n\in\mathbb{Z}\}$, **5.** $E=\{5^{(-1)^j 3^k};\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\}$. **6.** a) $F_1=\{\cos(n+\frac{1}{n})\pi;\ n\in\mathbb{N}\}$, b) $F_2=\{\cos(n+\frac{1}{n})\pi;\ n\in\mathbb{N}\text{ sudé}\}$, c) $F_3=\{\cos(n+\frac{1}{n})\pi;\ n\in\mathbb{N}\text{ liché}\}$
7. Nechť $A,B\subset\mathbb{R}$ a $S=\sup A$, $s=\inf A$, $T=\sup B$, $t=\inf B$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin? a) $A\cup B$, b) $A\cap B$, *c) $A+B=\{a+b\mid a\in A, b\in B\}$, d) $-A=\{-a\mid a\in A\}$, *e) $A\cdot B=\{a\cdot b\mid a\in A, b\in B\}$, f) $A-B$, g) $A\setminus B$, h) $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Výsledky a návody. **1.** $\sup A=1$, $\inf A=0$, maximum a minimum neexistuje. **2.** a),b) $\max B_1=\max B_2=1$, $\min B_1=\min B_2=-1$; c) $\max B_3=1$, $\inf B_3=0$, minimum neexistuje. **3.** a) C_1 není shora ani zdola omezená; b) C_2 není shora omezená, $\min C_2=3$; c) C_3 není zdola omezená, $\max C_3=0$. **4.** a) $\max D_1=\frac{5}{6}$, $\inf D_1=0$, minimum neexistuje; b) D_2 není shora omezená, $\inf D_2=0$, minimum neexistuje. **5.** E není shora omezená, $\inf E=0$, minimum neexistuje. **6.** a) $\max F_1=1$, $\inf F_1=-1$, minimum neexistuje; b) $\sup F_2=1$, $\min F_1=0$, maximum neexistuje; c) $\max F_3=1$, $\inf F_3=-1$, minimum neexistuje. **7.** a) $\sup(A\cup B)=\max\{S,T\}$, $\inf(A\cup B)=\min\{s,t\}$. b) Pokud $A\cap B\neq\emptyset$, pak $\max\{s,t\}\le\inf(A\cap B)\le\sup(A\cap B)\le\min\{S,T\}$ (a víc říci nelze). c) $\sup(A+B)=S+T$, $\inf(A+B)=s+t$. d) $\sup(-A)=-s$, $\inf(-A)=-S$. e) $\sup(A\cdot B)=\max\{S\cdot T, s\cdot t, s\cdot T, S\cdot t\}$, $\inf(A\cdot B)=\min\{S\cdot T, s\cdot t, s\cdot T, S\cdot t\}$. f) $\sup(A-B)=S-t$, $\inf(A-B)=s-T$. g) Pokud $A\setminus B\neq\emptyset$, pak $s\le\inf(A\setminus B)\le\sup(A\setminus B)\le S$ (a víc říci nelze). h) Pokud $A\triangle B\neq\emptyset$, pak $\min\{s,t\}\le\inf(A\cap B)\le\sup(A\cap B)\le\max\{S,T\}$ (a víc říci nelze).

IV. Spočtěte následující limity posloupností

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right)$ **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$ **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$, $(a\ge 0)$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ **14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ **15.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ **16.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ **17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}[kx]}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$
18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$ **19.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$, $(A,B,C>0)$ **20.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ **21.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$
22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i}{n}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ **23.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$
***24.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2-a_n}$
25. Nechť $p\in\mathbb{N}$, $x\ge 0$ a $x_n\ge 0$ pro $n\in\mathbb{N}$. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{x}$. **26.** Pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$? Totéž pro $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$.

Výsledky a návody. **1.** 0 **2.** 2 **3.** 2 **4.** 0 (rozšiřte vhodným výrazem) **5.** 0 **6.** Nemá limitu. **7.** 0 **8.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{1}{2}$ **10.** $\frac{1}{3}$ **11.** $\frac{1}{4}$ **12.** 1 pro $a>0$, 0 pro $a=0$ (pro $a>0$ pište $\sqrt[n]{a}=1+\delta_n$ a ukažte, že $\delta_n\to 0$) **13.** 1 (pište $\sqrt[n]{n}=1+\delta_n$ a ukažtem že $\delta_n\to 0$) **14.** 1 **15.** 0 **16.** 0 **17.** $\frac{1}{2}$ **18.** $+\infty$ **19.** $\max(A,B,C)$ **20.** 1 **21.** 2 **22.** 0 **23.** 2 (dokažte, že a_n je rostoucí a omezená, a tedy má limitu, a pak, že limita musí být 2) **24.** 1 (dokažte, že posloupnost lichých i posloupnost sudých členů jsou monotónní a omezené, a že obě musí mít limitu 1) **25.** Použijte vhodné rozšíření výrazu $\sqrt[p]{x_n}-\sqrt[p]{x}$. **26.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$, $x=k\pi$, jinak limita neexistuje, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx=1$, $x=2k\pi$, jinak limita neexistuje. (Použijte, že $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n+2)x-\sin nx)=0$, existuje-li limita $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$.)

V. Spočtěte limity

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}})$ **3.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

4. Spočtěte v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$ a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$.

5. Dokažte, že součin $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

6. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i} = 0$, pokud $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0$

Výsledky a návody. **1.** 0 (vhodně rozšiřte a jmenovatele odhadněte). **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{1}{2}$ (vyjádřete jednoduše $\prod_{n=1}^{k}(1-\frac{1}{(n+1)^2})$ a spočtěte limitu této posloupnosti) **4.** a) 1, pokud $k > l$; -1, pokud $k < l$; 0, pokud $k = l$. b) 1, pokud $k > l$; $(-1)^l$, pokud $k < l$; $-\infty$, pokud $k = l$ je sudé; -1, pokud $k = l$ je liché. **5.** Použijte větu o limitě monotónní posloupnosti. **6.** Dokazujte matematickou indukcí v závislosti na k. Pro $k = 2$ proveďte vhodné rozšíření.

VI. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k^k}$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}$ **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **6.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$

Zjistěte, pro které hodnoty parametrů konvergují následující řady:

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\ln x}$, $x \in \mathbb{R}$ **8.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{k^\alpha+1}{k^\beta+1}$, $0 \le \alpha \le \beta$ **10.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x \in \mathbb{R}$ **11.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!e^k}{k^k}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$, $x \in \mathbb{R}$ **12.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kxe^{-kx}\cos kx$, $x \in \mathbb{R}$ **13.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$, $x \in \mathbb{R}$ **14.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{k}\ln k}$, $x \in \mathbb{R}$ **15.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k}$, $z \in \mathbb{C}$ **16.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)\sqrt[k]{\frac{x^2}{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$

Vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní) následujících řad:

17. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k\sin k}{k^2+1}$ **18.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k\sin^2 k}{k^2+1}$ **19.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k}}{\ln k}$

20. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+1}\frac{\sinh k^2+\cosh k^2}{\cosh k^2+1}$ **21.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+\sqrt{k}}$, $z \in \mathbb{C}$

Výsledky a návody. **1.** Konverguje. **2.** Konverguje. **3.** Diverguje. **4.** Konverguje. **5.** Konverguje absolutně. **6.** Diverguje ($\sin k \not\to 0$). **7.** Konverguje, právě když $x \in (0, \frac{1}{e})$. **8.** Konverguje, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$. **9.** Konverguje, právě když $\beta - \alpha > 1$. **10.** Konverguje absolutně pro $x \neq \pm 1$, jinak diverguje. **11.** Konverguje absolutně pro $x \neq \pm 1$, pro $x = -1$ konverguje neabsolutně (Leibnizovo kritérium), pro $x = 1$ diverguje (srovnání s $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$). (Pro $x = \pm 1$ použijte Stirlingův vzorec pro $k!$.) **12.** Konverguje absolutně pro $x \ge 0$, pro $x < 0$ diverguje (nutná podmínka konvergence). **13.** Konverguje absolutně pro $|x| < \frac{1}{e}$, jinak diverguje (pro $x = \pm\frac{1}{e}$ obtížnější, nikoli elementární). **14.** Konverguje absolutně. (Srovnejte s $\sum\limits_{\frac{k=1}{k\log^2 k}}^{\infty}$, a ověřte, že tato řada konverguje.) **15.** Konverguje absolutně pro $|z| \le 1$, jinak diverguje. **16.** Konverguje absolutně pro $x = 0$, jinak konverguje neabsolutně.

TEST ČÍSLO 1 - PRVNÍ VERZE

1. Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \geq 0$ a $m \in \mathbb{Z}$ konverguje řada

(17 bodů)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{\left(\alpha^2 + \frac{1}{k}\right)^k}.$$

Řešení. Zřejmě jde o řadu s kladnými členy. Zkusme použít odmocninové kritérium.

$$\sqrt[k]{\frac{k^m}{\left(\alpha^2 + \frac{1}{k}\right)^k}} = \frac{(\sqrt[k]{k})^m}{\alpha^2 + \frac{1}{k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} & \alpha > 0, \\ +\infty & \alpha = 0. \end{cases}$$

Z limitního odmocninového kritéria tedy plyne, že pro $\alpha > 1$ (a libovolné m) řada konverguje, zatímco pro $\alpha \in [0, 1)$ (a libovolné m) řada diverguje. O tom, co se děje, pokud $\alpha = 1$, odmocninové kritérium nic neříká.

Pro $\alpha = 1$ má naše řada tvar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{(1+\frac{1}{k})^k}$. Víme, že $\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^k = e$, a tedy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^m}{(1+\frac{1}{k})^k}}{k^m} = \frac{1}{e} \in (0, \infty),$$

a tedy naše řada konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^m$. Ta ovšem konverguje, právě když $m < -1$.

Závěr: Řada ze zadání konverguje, právě když $\alpha > 1$ (a m je libovolné), nebo $\alpha = 1$ a $m < -1$.

2. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left([\sqrt{2n}]^2 + \sin^5 n \right) \cdot \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 5n} \right).$$

Hranaté závorky označují celou část čísla. (17 bodů)

Řešení. Limita je -2. Postup stejný, jako ve druhé verzi.

3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{7} - \frac{1}{2} \right)^n.$$

Věty (a/nebo definice), které používáte, zformulujte a jejich užití podrobně vysvětlete. (16 bodů)

Řešení. Limita je 0. Postup a zdůvodnění analogické, jako ve třetí verzi.

TEST ČÍSLO 1 - DRUHÁ VERZE

1. Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \geq 0$ a $m \in \mathbb{Z}$ konverguje řada

(17 bodů)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{\left(2\alpha + \frac{1}{k}\right)^k}.$$

Řešení. Řada konverguje, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$ (a m je libovolné), nebo $\alpha = \frac{1}{2}$ a $m < -1$. (Postup stejný jako v první verzi.)

2. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left([3\sqrt{n}]^2 + 10\sin n\right) \cdot \left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+15n}\right).$$

Hranaté závorky označují celou část čísla. (17 bodů)
Řešení. Výraz, jehož limitu počítáme, nejprve upravme.

$$\begin{aligned}
&\left([3\sqrt{n}]^2 + 10\sin n\right) \cdot \left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+15n}\right) \\
&= \left([3\sqrt{n}]^2 + 10\sin n\right) \cdot \left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+15n}\right) \cdot \frac{(\sqrt[3]{n^3+n})^2 + (\sqrt[3]{n^3+n})\cdot(\sqrt[3]{n^3+15n}) + (\sqrt[3]{n^3+15n})^2}{(\sqrt[3]{n^3+n})^2 + (\sqrt[3]{n^3+n})\cdot(\sqrt[3]{n^3+15n}) + (\sqrt[3]{n^3+15n})^2} \\
&= \left([3\sqrt{n}]^2 + 10\sin n\right) \cdot \frac{n - 15n}{(\sqrt[3]{n^3+n})^2 + (\sqrt[3]{n^3+n})\cdot(\sqrt[3]{n^3+15n}) + (\sqrt[3]{n^3+15n})^2} \\
&= \frac{-14n\cdot\left([3\sqrt{n}]^2 + 10\sin n\right)}{n^2\cdot\left((\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}})^2 + (\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}})\cdot(\sqrt[3]{1+\frac{15}{n^2}}) + (\sqrt[3]{1+\frac{15}{n^2}})^2)\right)} \\
&= -14\cdot\frac{\frac{[3\sqrt{n}]^2}{n} + 10\frac{\sin n}{n}}{(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}})^2 + (\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}})\cdot(\sqrt[3]{1+\frac{15}{n^2}}) + (\sqrt[3]{1+\frac{15}{n^2}})^2)}
\end{aligned}$$

Jmenovatel zlomku má zřejmě limitu 3. Dále, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a $\sin n$ je omezená posloupnost. Zbývá spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[3\sqrt{n}]^2}{n}$. Podle definice celé části platí:

$$\frac{(3\sqrt{n}-1)^2}{n} \le \frac{[3\sqrt{n}]^2}{n} \le \frac{(3\sqrt{n})^2}{n}$$

Výraz na pravé straně je roven 9, výraz na levé straně

$$\frac{9n - 6\sqrt{n} + 1}{n} = 9 - \frac{6}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 9,$$

a tedy dle věty o dvou policajtech dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[3\sqrt{n}]^2}{n} = 9$. Limita ze zadání je tedy rovna $\frac{-14\cdot 9}{3} = -42$.
3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5} - \frac{1}{7}\right)^n.$$

Věty (a/nebo definice), které používáte, zformulujte a jejich užití podrobně vysvětlete. (16 bodů)
Řešení. Limita je 0. Postup a zdůvodnění analogické, jako ve třetí verzi.

Test číslo 1 - třetí verze

1. Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \ge 0$ a $m \in \mathbb{Z}$ konverguje řada

(17 bodů)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{k}\right)^k}.$$

Řešení. Řada konverguje, právě když $\alpha > 1$ (a m je libovolné), nebo $\alpha = 1$ a $m < -1$. (Postup stejný jako v první verzi.)

2. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left([57\sqrt{n}]^2 + \cos 7n\right) \cdot \left(\sqrt[3]{n^3+10n} - \sqrt[3]{n^3+5n}\right).$$

Hranaté závorky označují celou část čísla. (17 bodů)
Řešení. Limita je $5 \cdot 19 \cdot 57 = 5415$. Postup stejný, jako ve druhé verzi.
3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{9} - \frac{1}{5}\right)^n.$$

Věty (a/nebo definice), které používáte, zformulujte a jejich užití podrobně vysvětlete. (16 bodů)
Řešení. Jsou alespoň dvě možnosti. Kurzívou napsané věty či definice je třeba zformulovat (a vysvětlit použití - která čísla v tomto konrétním případě odpovídají příslušným písmenkům v obecné větě).
1. MOŽNOST: Víme, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9} = 1$ a přitom $\sqrt[n]{9} > 1$ pro všechna n. Z *definice limity* (v obvyklém tvaru pro $\varepsilon = \frac{1}{10}$) dostáváme, že existuje takové n_0, že pro všechna $n > n_0$ platí $1 < \sqrt[n]{9} < 1 + \frac{1}{10}$. To znamená, že pro $n > n_0$ platí $0 < \frac{4}{5} < \sqrt[n]{9} - \frac{1}{5} < \frac{9}{10}$, a tedy $0 < \left(\sqrt[n]{9} - \frac{1}{5}\right)^n < \left(\frac{9}{10}\right)^n$. Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$ (*geometrická posloupnost s kvocientem z* $(0,1)$), a tedy limita je 0 z *věty o policajtech*.
2. MOŽNOST: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{9} - \frac{1}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, protože víme, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9} = 1$. Platí $\frac{4}{5} < 1$, a tedy podle *limitního odmocninového kritéria* řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{9} - \frac{1}{5}\right)^n$ konverguje, a tedy limita ze zadání je 0 podle *nutné podmínky pro konvergenci řady.*

VII. Spočtěte limity nebo dokažte, že neexistují

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ **2.** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ **3.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ **4.** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ **5.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ **7.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ **8.** $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px}$ **9.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **11.** $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$ **12.** $\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $(m,n\in\mathbb{N})$
13. $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, $(n\in\mathbb{N})$ **14.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ **15.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $(m,n\in\mathbb{N}, a,b\in\mathbb{R})$
16. $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $(m,n\in\mathbb{N})$ **17.** $\lim_{x\to 1}([x]-x)$ **18.** $\lim_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$ **19.** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$
20. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **21.** $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos \alpha x)}{\log(\cos \beta x)}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** 6 **2.** $-\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 1 **5.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **6.** 2 **7.** $\frac{\alpha}{\beta}$, pokud $\beta \neq 0$. **8.** $\frac{1}{p}$, pokud $p \neq 0$. **9.** -3 **10.** $\frac{3}{2}$ **11.** $\frac{112}{27}$ **12.** $\frac{1}{2}mn(n-m)$ **13.** $\frac{1}{2}n(n+1)$ **14.** $\frac{1}{n}$ **15.** $\frac{an-bm}{mn}$ **16.** $\frac{m}{n}$ **17.** Limita neexistuje (zleva -1, zprava 0). **18.** 1 **19.** $\frac{4}{3}$ **20.** $-\frac{1}{12}$ **21.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, pokud $\beta \neq 0$

VIII. Spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{\log(x^{10}+x+1)}$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sqrt{|\cos\frac{1}{x}|}$ **7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\log(x+1)-\sin\log x)$ **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, (a,b,c>0)$ **10.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$ **12.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{i\cdot\arcsin x}{ix+\sin x-2x}$ **15.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ **16.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(1+2^x)\cdot\log(1+\frac{3}{x})$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\cdot x^k$ **18.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$, **19.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

20. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby platilo $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

Výsledky a návody. **1.** 0 **2.** e^3 **3.** e **4.** 1 **5.** $\frac{1}{5}$ **6.** 0 **7.** $\frac{3}{2}$ **8.** 0 **9.** $\sqrt[3]{abc}$ **10.** Limita neexistuje. **11.** $+\infty$ **12.** 1 **13.** 1 **14.** $\frac{1-i}{2}$ **15.** $\frac{2}{3}$ **16.** $3\log 2$ **17.** 0 pro $k>1$, $\frac{4}{\pi}$ pro $k=1$, $+\infty$ pro $k<1$ liché, neexistuje pro $k<1$ sudé. **18.** 0 **19.** $\frac{1}{2}$ **20.** $a=-1, b=\frac{1}{2}$

IX. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkcí

1. x^x **2.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **3.** $(\sin x)^{\cos x}$ **4.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$ **5.** $\arcsin(\sin x)$, **6.** $\log\arccos x$

7. $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ **8.** $\operatorname{arctg} e^x-\log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$ **9.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$

10. $(\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$ **11.** $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{\ln|x|}} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

12. Spočtěte limity a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$, $(a>0)$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

Výsledky a návody. **1.** f je definována a spojitá na $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$, lze tedy spojitě dodefinovat na $[0,\infty)$. $f'(x)=x^x(\log x+1)$ pro $x>0$. Po dodefinování platí $f'_+(0)=-\infty$. **2.** f je definována a spojitá na $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$, nelze spojitě rozšířit. $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}+2}\cdot(\log x-1)$ pr $x>0$. **3.** f je definována a spojitá na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$. $\lim\limits_{x\to 2k\pi+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi-} f(x)=+\infty$, lze tedy spojitě rozšířit na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\langle 2k\pi,(2k+1)\pi)$. $f'(x)=(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\log\sin x\right)$ pro $x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$. Po dodefinování je $f'_+(2k\pi)=1$. **4.** f je definována a spojitá na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f(x)=\frac{\pi}{2}$, lze tedy spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$. $f'(x)=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$ pro x z defininičního oboru f; po dodefinování je $f'(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0$, neboli uvedený vzoreček pak platí na $\mathbb{R}$. **5.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x)=1$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $f'(x)=-1$ pro $x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{2}\pi+2k\pi)$, $f'_-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=f'_+(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=1$, $f'_+(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=f'_-(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=-1$ $(k\in\mathbb{Z})$. **6.** f je definována a spojitá na $\langle -1,1)$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-\infty$. $f'(x)=-\frac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}$ pro $x\in(-1,1)$, $f'_+(-1)=-\infty$. **7.** f je definována a spojitá na $\langle 0,+\infty)$. $f'(x)=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ pro $x>0$, $f'_+(0)=0$. **8.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ pr $x\in\mathbb{R}$. **9.** f je definována a spojitá na $(1,\infty)$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=0$, lze tedy spojitě rozšířit na $\langle 1,\infty)$. $f'(x)=\frac{x\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ pro $x>1$, po dodefinování je $f'_+(-1)=+\infty$.

10. f je definována a spojitá na $(0,1\rangle$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, lze tedy spojitě dodefinovat na $\langle 0,1\rangle$. $f'(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\log \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$ pro $x \in (0,1)$, $f'_-(1) = +\infty$, po dodefinování je $f'_+(0) = -\infty$. **11.** f je definována a spojitá na $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+} = \lim\limits_{x\to -1-} f(x) = +\infty$. Funkce f lze tedy rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tak, že bude spojitá všude kromě bodů ± 1, a navíc bude spojitá v bodě 1 zleva a v bodě -1 zprava. $f'(x) = -e^{\frac{1}{\log |x|}} \cdot \frac{1}{x \log^2 |x|}$ pro $x \neq 0, \pm 1$. Po dodefinování je $f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_-(1) = f'_+(-1) = 0$. **12.** a) $a^a(\log a + 1)$, b) e^2.

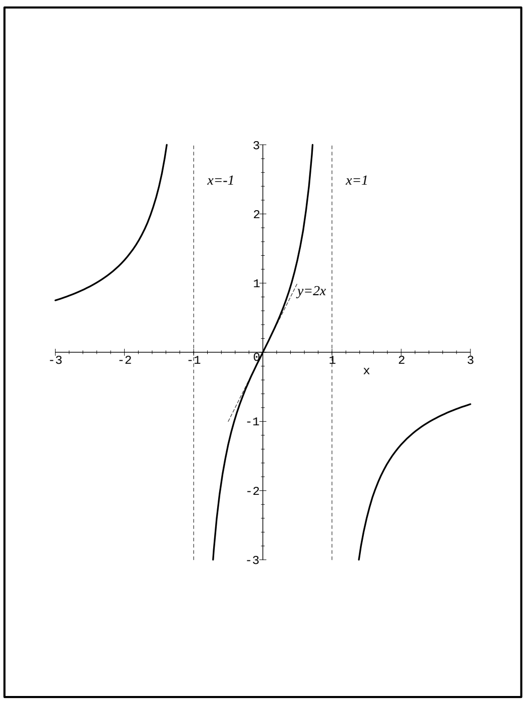
===

X. Příklady na průběh funkcí

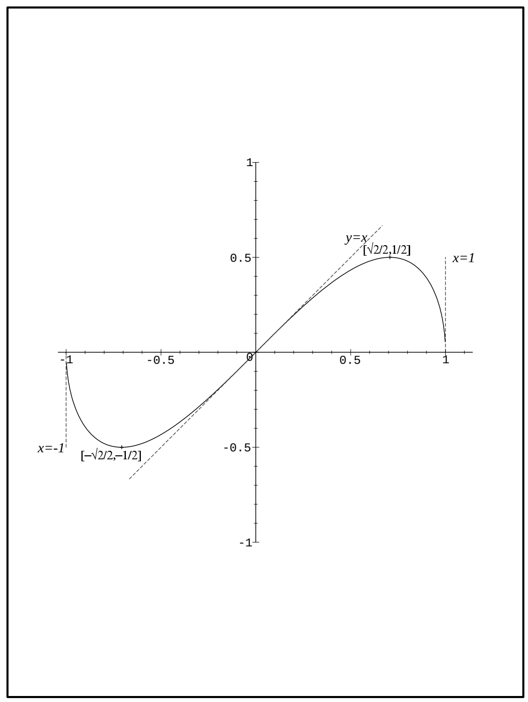
1. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ **2.** $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ **3.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ **4.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$ **6.** $f(x) = \frac{x^4+8}{x^3+1}$ **7.** $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$ **8.** $f(x) = \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$ **10.** $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ **11.** $f(x) = |\sin x| + \cos 2x$
12. $f(x) = \exp(-x^2 + 3x - 7)$

Výsledky a návody.

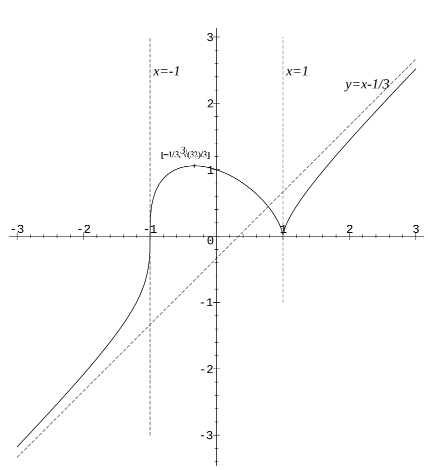
1.



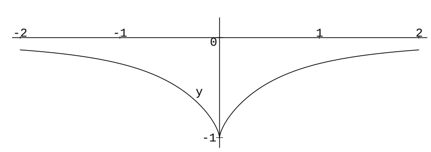
2.



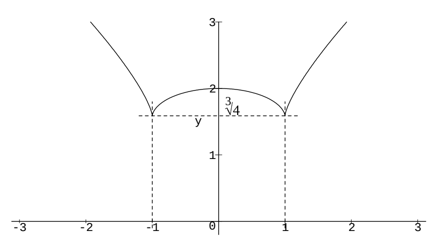
3.



5.



7.



Řešení příkladu X/6 – průběh funkce $f(x) = \frac{x^4+8}{x^3+1}$

1. $D_f = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, f je spojitá na svém definičním oboru. Navíc zřejmě $f(x) > 0$ pro $x > -1$ a $f(x) < 0$ pro $x < -1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+} = +\infty$.

3. Pro $x \in D_f$ platí: $f'(x) = \frac{x^2(x-2)(x^3+2x^2+4x+12)}{(x^3+1)^2}$. Vyšetřeme znaménko derivace. K tomu nejprve vyšetřeme funkci $g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 12$.
Tato je spojitá na $\mathbb{R}$, stejně jako její derivace. Platí $g'(x) = 3x^2 + 4x + 4$. Diskriminant této funkce je $4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -32 < 0$, tedy $g'(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a tedy g je rostoucí na $\mathbb{R}$. Protože $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, má funkce g právě jeden reálný kořen. Označme ho α. Protože $g(0) = 12 > 0$, je $\alpha < 0$. Pro přesnější určení si povšimněme, že $g(-2) = 4 > 0$ a $g(-3) = -9 < 0$, a tedy $\alpha \in (-3,-2)$. Analýzou znaménka $f'(x)$ a použitím věty o vztahu derivace a monotonie dostaneme tabulku:

x	$-\infty$		α		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	8	$\searrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ještě můžeme alespoň zhruba odhadnout $f(\alpha)$. Platí $f(-2) = -\frac{24}{7} \in (-4,-3)$ a $f(-3) = -\frac{89}{26} \in (-4,-3)$. Máme tedy $f(\alpha) > -4$ (dokonce $f(\alpha) > -\min(\frac{24}{7}, \frac{89}{26})$). Určitě víme, že $f(\alpha) < 0$ (protože $\alpha < -1$). S libovolnou přesností ho můžeme odhadnout následující metodou. Zřejmě obor hodnot funkce f je $(-\infty, f(\alpha)] \cup [\frac{8}{3}, +\infty)$, a tedy pro libovolné $c < 0$ máme $f(\alpha) \geq c$, právě když f nabývá hodnoty c. Zkoumejme tedy rovnici $f(x) = c$. Ta má řešení, právě když $P_c(x) = x^4 - cx^3 - c + 8$ má nějaký kořen. Přitom $P_c'(x) = 4x^3 - 3cx^2 = x^2(4x - 3c)$. Odtud vidíme, že P_c má globální minimum v bodě $x = \frac{3}{4}c$. Spočtěme $P_c(\frac{3}{4}c) = -\frac{27}{256}c^4 - c + 8$. Protože pro $c = -3$ vyjde $P_c(\frac{3}{4}c) > 0$, je $f(\alpha) < -3$ (ve skutečnosti je $f(\alpha)$ (jediným záporným) kořenem rovnice $P_c(\frac{3}{4}c) = 0$). Nám může stačit, že $f(\alpha) \in (-4,-3)$.

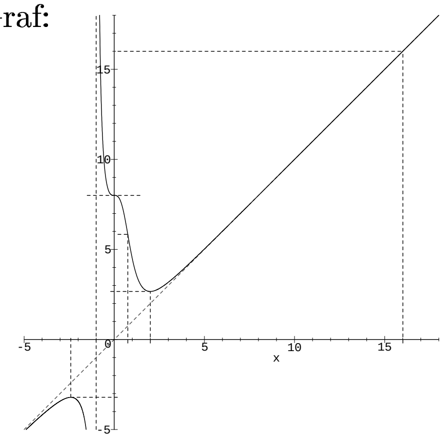
4. Pro $x \in D_f$ je $f'(x) = \frac{-6x(x^4-2x-16x^3+8)}{(x^3+1)^3}$. Abychom zjistili, jak je to se znaménkem f'', zkoumejme nejprve funkci $h(x) = x^4 - 2x - 16x^3 + 8$.
Platí: $h'(x) = 4x^3 - 2 - 48x^2$, $h''(x) = 12x^3 - 96x = 12x(x-8)$.
Tedy: h' roste na $(-\infty, 0]$, klesá na $[0, 8]$, roste na $[8, +\infty]$. Máme $h'(0) = -2$, a tedy $h' < 0$ na $(-\infty, 8]$. Protože $h'(8) < 0$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x) = +\infty$, má funkce h' jediný kořen β, a platí pro něj $\beta > 8$.
Tedy: Funkce h klesá na $(-\infty, \beta]$ a roste na $[\beta, +\infty)$. Platí $h(0) = 8 > 0$, $h(1) = -9 < 0$, h má tedy kořen $\gamma \in (0, 1)$. Protože $h(\beta) < h(1) < 0$, má funkce h ještě jeden kořen $\delta > \beta$. Z výše uvedených faktů o monotonii jsou γ, δ jediné dva kořeny funkce h. Nyní můžeme doplnit tabulku:

x	$-\infty$		α		-1		0		β		2		δ		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	8	$\searrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	$f(\delta)$	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$	$f'(\beta)$	$-$	0	$+$	$f'(\delta)$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	

Ještě můžeme zjistit, že $\delta \in (16, 17)$, $f(\delta) \in (0, 4)$ a $f(\gamma) \in (\frac{9}{2}, 8)$.

5. Funkce f má v $+\infty$ i v $-\infty$ asymptotu $y = x$.

6. Graf:



Test číslo 2 – první verze

1. Spočtěte limitu:

(17 bodů)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+1}-x-2\right)^x$$

Řešení. Podle definice obecné mocniny máme:

$$\left(\sqrt{x^2+6x+1}-x-2\right)^x=\exp\left(x\cdot\log\left(\sqrt{x^2+6x+1}-x-2\right)\right)$$

Nejprve upravme argument logaritmu:

$$\sqrt{x^2+6x+1}-x-2=\frac{6x+1}{\sqrt{x^2+6x+1}+x}-2=\frac{6+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}-2.$$

Odtud vidíme, že limita tohoto výrazu pro $x\to+\infty$ je 1. Navíc tento výraz na nějakém okolí $+\infty$ nenabývá hodnoty 1, a tedy s použitím věty o limitě složené funkce a vzorečku $\lim\limits_{y\to1}\frac{\log y}{y-1}=1$, dostáváme:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\sqrt{x^2+6x+1}-x-2\right)}{\sqrt{x^2+6x+1}-x-3}=1,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\log\left(\sqrt{x^2+6x+1}-x-2\right)&=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+6x+1}-x-3\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{x^2+6x+1-(x+3)^2}{\sqrt{x^2+6x+1}+x+3}\\&=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{-8}{\sqrt{x^2+6x+1}+x+3}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{3}{x}}=\frac{-8}{2}=-4.\end{aligned}$$

Protože funkce exp je spojitá v bodě -4, plyne z věty o limitě složené funkce, že původní limita je $e^{-4}=\frac{1}{e^4}$.

2. Spočtěte derivaci (včetně jednostranných derivací) funkce f ve všech bodech, kde existují.

(17 bodů)
$$f(x)=\left|\sin^2 x-\frac{3}{4}\right|\cdot\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$$

3. Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\log\frac{x^2+3x}{x^2+15}$$

Všechny věty, které používáte, zformulujte a jejich použití podrobně vysvětlete (zvl. u věty o limitě složené funkce). (16 bodů)

Test číslo 2 – druhá verze

1. Spočtěte limitu:

(17 bodů)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-2}-x-1\right)^x$$

2. Spočtěte derivaci (včetně jednostranných derivací) funkce f ve všech bodech, kde existují.

(17 bodů)
$$f(x)=\left|\cos^2 x-\frac{1}{2}\right|\cdot\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Řešení. Funkce f je zřejmě definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$. V bodech, kde výraz v absolutní hodnotě je různý od 0, tj. pokud $\cos x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, tj. pokud $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, pak můžeme psát:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\operatorname{sgn}\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left|\cos^2 x-\frac{1}{2}\right|\cdot 2\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\cos x\\
&=2\cos x\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\sin x\cdot\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)\cdot\right)\\
&=2\cos x\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\sin x\cdot\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)\right)\\
&=2\cos x\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\operatorname{sgn}\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\sin x-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\right)\right)\\
&=-2\cos x\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\operatorname{sgn}\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Zbývá vyšetřit body $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ pro $k\in\mathbb{Z}$. Protože f je spojitá, můžeme derivace v těchto bodech zkusit počítat jako limitu derivace. Je tedy zřejmé, že

$$f'(\tfrac{\pi}{4}+2k\pi)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+2k\pi}f'(x)=0,\quad f'(\tfrac{3}{4}\pi+2k\pi)=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi+2k\pi}f'(x)=0\ (k\in\mathbb{Z})$$

Podobně

$$\begin{aligned}
f'_+(-\tfrac{\pi}{4}+2k\pi)&=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}+2k\pi+}f'(x)=2,\quad f'_-(-\tfrac{\pi}{4}+2k\pi)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}+2k\pi-}f'(x)=-2,\\
f'_+(-\tfrac{3}{4}\pi+2k\pi)&=\lim_{x\to-\frac{3}{4}\pi+2k\pi+}f'(x)=2,\quad f'_-(-\tfrac{3}{4}\pi+2k\pi)=\lim_{x\to-\frac{3}{4}\pi+2k\pi-}f'(x)=-2
\end{aligned}$$

V posledně jmenovaných bodech tedy neexistuje oboustranná derivace, protože příslušné jednostranné derivace jsou různé.

3. Spočtěte limitu:
$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\sin\frac{x^2-9x+8}{x^3+11}$$

Všechny věty, které používáte, zformulujte a jejich použití podrobně vysvětlete (zvl. u věty o limitě složené funkce). (16 bodů)

Test číslo 2 – třetí verze

1. Spočtěte limitu:

(17 bodů)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-x+2\right)^x$$

2. Spočtěte derivaci (včetně jednostranných derivací) funkce f ve všech bodech, kde existují.

(17 bodů)
$$f(x)=\left|\sin^2 x-\frac{1}{4}\right|\cdot\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

3. Spočtěte limitu:
$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(e^{\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}}-1\right)$$

Všechny věty, které používáte, zformulujte a jejich použití podrobně vysvětlete (zvl. u věty o limitě složené funkce). (16 bodů)

Řešení. Platí:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{13}{x^2}+\frac{42}{x^3}}{1+\frac{153}{x^3}}=0,$$
podle vět o limitě součtu, součinu, rozdílu a podílu. Navíc
$$\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}=\frac{(x-6)(x-7)}{x^3+153}\neq 0 \text{ pro } x>7.$$

Dále víme, že $\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$, a tedy jsou splněny předpoklady *věty o limitě složené funkce*, a proto platí:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}}-1}{\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}}=1,$$
a tedy dle *věty o limitě součinu* máme
$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(e^{\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{13}{x}+\frac{42}{x^2}}{1+\frac{153}{x^3}}=1$$
podle vět o limitě součtu, součinu, rozdílu a podílu.

Věta o limitě složené funkce: Nechť $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b}g(y)=c$ a existuje P prstencové okolí bodu a, že pro $x\in P$ je $f(x)\neq b$, pak $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=c$.

V našem případě bylo: $f(x)=\frac{x^2-13x+42}{x^3+153}$; $a=+\infty$, $b=0$, $P=(7,+\infty)$, $g(y)=\frac{e^y-1}{y}$, $c=1$.

XI. Další příklady na průběh funkcí

1. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ **2.** $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **3.** $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ **4.** $f(x) = \arcsin(\cos^2 x)$

5. $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ ***6.** $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ ***7.** $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2-1}}$

***8.** $f(x) = \arcsin(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2})$ ***9.** $f(x) = |\operatorname{arctg} \frac{1-x\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4}|$

10. Dokažte, že $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

11. Dokažte, že funkce $\sin x - x + \frac{x^3}{6}$ je rostoucí na $\mathbb{R}$.

12. Určete počet inflexních bodů funkce $e^x + ax^3$ v závislosti na a.

13. Určete počet reálných kořenů rovnice (v závislosti na parametrech):
a) $x^3 + 3ax + 1 = 0$, b) $x^3 + px + q = 0$, c) $\log x = kx$, d) $x^5 - 5x = a$.

Výsledky a návody. **10.** Ukažte, že $f^{(4)} > 0 \Rightarrow f''' $ roste $\Rightarrow f'' \geq 0 \Rightarrow f'$ roste $\Rightarrow f \geq 0$. **11.** Ukažte, že $f''' \geq 0 \Rightarrow f''$ roste $\Rightarrow f' \geq 0 \Rightarrow f$ roste. **12.** 1 pro $a > 0$, 2 pro $a \in (-\frac{e}{6}, 0)$, 0 pro $a \leq -\frac{e}{6}$ nebo $a = 0$. **13.** a) 1 pro $a > -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, 2 pro $a = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, 3 pro $a < -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; b) 1 pro $p > -\frac{3\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[3]{4}}$, 2 pro $p = -\frac{3\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[3]{4}}$, 3 pro $p < -\frac{3\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[3]{4}}$. c) 0 pro $k > \frac{1}{e}$, 1 pro $k = \frac{1}{e}$ nebo $k \leq 0$, 2 pro $k \in (0, \frac{1}{e})$; d) 1 pro $|a| > 4$, 2 pro $|a| = 4$, 3 pro $|a| < 4$.