I. Spočtěte následující limity (pomocí l'Hospitalova pravidla či jinak):

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cosh x-\cos x}{x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$ **4.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}$ **5.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$ **7.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$ **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

10. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$, $a>0$, $b>0$

12. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$ **13.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$

- -

Výsledky a návody. **1.** 1 (Lze i bez l'Hospitalova pravidla. $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.) **2.** 2 **3.** -2 **4.** $4\frac{\pi-4}{\pi^2}$ (dosazením, l'Hospitalovo pravidlo není třeba, a navíc ho použít nelze) **5.** $\frac{1}{3}$ (Lze i elementárně - pomocí rozšíření a převedení na limitu v 0.) **6.** $\frac{1}{6}$ **7.** $\frac{1}{6}\log a$, $a>0$ **8.** -2 **9.** $\frac{1}{6}$ **10.** $\exp(\frac{1}{\sin a\cos a})$, $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ (není třeba l'Hospitalovo pravidlo, pokud známe vzoreček pro $\operatorname{tg}(x-y)$) **11.** $\frac{a-b}{3ab}$ **12.** $a^a(\log a-1)$ **13.** a (Vytkněte vhodný člen a alespoň zpočátku používejte elementární metody výpočtu limit.) **14.** $-\frac{1}{6}$ (l'Hospitalovo pravidlo není třeba. Ukažte nejprve, že lze vynechat zlomek $\frac{\ln(e^x+x)}{x}$, a pak spočtěte pomocí vhodného rozšíření.)

═══

II. Spočtěte následující limity pomocí Taylorova vzorce

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ **9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$

10. Najděte $n\in\mathbb{N}$, aby limita a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)}{x^n}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^n}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\operatorname{tg}x)}{x^n}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$ byla konečná a různá od 0, a spočtěte tuto limitu.

11. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^4}=0$.

12. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg}x}{x^4}=0$ a spočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg}x}{x^5}$.

- -

Výsledky a návody. **1.** $-\frac{1}{12}$ **2.** $\frac{1}{3}$ **3.** $\frac{1}{3}$ (lze i elementárně, pomocí vhodného rozšíření) **4.** $-\frac{1}{4}$ (lze i elementárně, pomocí dvojího vhodného rozšíření, takový postup je početně náročnější) **5.** $\log^2 a$ **6.** 0 **7.** $\frac{1}{2}$ **8.** $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{1}{6}$ **10.** (a) $n=7$, limita je $\frac{1}{30}$; (b) $n=2$, limita je 1; (c) $n=4$, limita je $\frac{1}{3}$; (d) $n=1$, limita je $\frac{e}{2}$. **11.** $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ **12.** $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, limita vyjde $-\frac{1}{20}$

═══

III. Vyjádřete primitivní funkce pomocí elementárních funkcí na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3+2x+\frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x+16e^{8x}-\frac{1}{x}+3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int\sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

5. $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int\sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int\operatorname{cotg}x\,\mathrm{d}x$

10. $\int\sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int|\cos x|\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int\arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

15. $\int\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int\operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$ **18.** $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int\cos^4 x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)}$

21. $\int\frac{x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ **22.** $\int\frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\log x\log\log x}$ **24.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ **25.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ **26.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$

27. $\int\log x\,\mathrm{d}x$ **28.** $\int\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$ **29.** $\int\frac{\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$ **30.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a,b\in\mathbb{R}$ **31.** $\int x^\alpha\log x\,\mathrm{d}x$

32. $\int x^3\log^2 x\,\mathrm{d}x$ **33.** $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **34.** $\int\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. **1.** $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16\log|x|$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **5.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$ **6.** $\frac{1}{8}\sin^8 x$ na $\mathbb{R}$ **7.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ **8.** $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.** $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **10.** $\frac{1}{4}|x|\cdot x^3$, na $\mathbb{R}$ **11.** $\sin\left(x - \pi\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right]\right) + 2\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right]$, na $\mathbb{R}$ **12.** $F(x) =$

$$\begin{cases} 2\log(1+x^2) + \pi(x_2-x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[-\infty,-x_2] \\ -\pi(x+x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[-x_2,-x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1] \\ \pi(x-x_1) - 2\log(1+x^2) + 4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[x_1,x_2] \\ 2\log(1+x^2) + \pi(x_2-x_1) + 4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 = \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{matrix}, \text{ na } \mathbb{R}$$

13. $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2 + 2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na $\mathbb{R}$ **14.** $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$, na $\mathbb{R}$ **15.** $\operatorname{tg} x - x$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **16.** $-\operatorname{cotg} x - x$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **17.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{6}}{2}$, na $\mathbb{R}$ **18.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$, na $\mathbb{R}$ **19.** $\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x$, na $\mathbb{R}$ **20.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)$, na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi})$, $k\in\mathbb{Z}$ **21.** $\frac{1}{8}\log(1+4x^2)$, na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$, na $\mathbb{R}$ **23.** $\log|\log\log x|$, na $(1,e)$ a na (e,∞) **24.** $\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **25.** $-\log\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\right|$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **26.** $(x-1)e^x$ na $\mathbb{R}$ **27.** $x\log x - x$ na $(0,\infty)$ **28.** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **29.** $-\frac{1}{2}e^{-x}\cdot(\sin x + \cos x)$, na $\mathbb{R}$ **30.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx + b\sin bx)$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2\neq 0$; x na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **31.** $\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\cdot\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha\neq 1$; $\frac{1}{2}\ln^2 x$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha = -1$ **32.** $\frac{1}{4}x^4\ln^2 x - \frac{1}{8}x^4\ln x + \frac{1}{32}x^4$, na $(0,\infty)$ **33.** $2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)$, na $(0,\infty)$ **34.** $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$, na $\mathbb{R}$

==

IV. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int\frac{x^{17}-5}{x-1}\,dx$ **2.** $\int\frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,dx$ **3.** $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$ **4.** $\int\frac{x}{x^3-1}\,dx$ **5.** $\int\frac{dx}{x^4+1}$
6. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ pomocí $x=\operatorname{tg} y$ **7.** $\int\frac{x^8+x-1}{x^6+1}\,dx$ **8.** $\int\frac{dx}{(x^2+3x+4)^2}$
9. Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c\in\mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$? **10.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **11.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ **12.** $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ **13.** $\int\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$
14. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ **15.** $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$ **16.** $\int\frac{\exp x}{\exp x+1}\,dx$ **17.** $\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ **18.** $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$
19. $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx$ **20.** $\int\frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$ **21.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ **22.** $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$
23. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ **24.** $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$ **25.** $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}$ **26.** $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$
27. $\int\frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$ **28.** $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ **29.** $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$ **30.** $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$
31. $\int\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$ **32.** $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ **33.** $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon>0$ **34.** $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Výsledky a návody. **1.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right)-4\log|x-1|$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **2.** $\left(\sum_1^{8}\frac{1}{2k}x^{2k}\right)-2\log|x-1|+3\log|x+1|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **3.** $x+\frac16\log|x|-\frac92\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$ **4.** $\frac16\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **5.** $\frac{\sqrt2}{8}\log\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}+\frac{\sqrt2}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt2+1)+\frac{\sqrt2}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt2-1)$ **6.** $\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac12\operatorname{arctg}x$ **7.** $\frac13x^3+\frac16\log(1+x^2)+\frac{\sqrt3-1}{2}\log(x^2-x\sqrt3+1)-\frac{\sqrt3+1}{2}\log(x^2+x\sqrt3+1)-\frac{3-\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt3)-\frac{3+\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt3)$ **8.** $\frac17\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+4}+\frac{4\sqrt7}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt7}$ **9.** $a+2b+3c=0$ **10.** $6\left(\frac19u^{(3/2)}-\frac18u^{(4/3)}+\frac17u^{(7/6)}-\frac16u+\frac15u^{(5/6)}-\frac14u^{(2/3)}\right)$, kde $u=x+1$, $x\in(-1,+\infty)$ **11.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,1)$ **12.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}-\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt3}+\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt3}$, kde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **13.** $t=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ **14.** $t=\sqrt[6]{x+1}$ **15.** $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **16.** $\log(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **17.** $e^x-\log(1+e^x)$ **18.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ **19.** $\frac12(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x\in(-\infty,1-\sqrt2)$ nebo $x\in(1+\sqrt2,+\infty)$ **20.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2}+\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt2}$, kde $t=\sqrt{x^2+2x+4}-x$, $x\in\mathbb{R}$ **21.** $\operatorname{argsinh}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac12x\sqrt{x^2-1}-\frac12\log|x+\sqrt{x^2-1}|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(1,+\infty)$ **23.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac12\arcsin x$ na $(-1,1)$ **24.** $\frac12\operatorname{arctg}\sin^2x$ **25.** a **26.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac x2$ **27.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **28.** substituce $y=\cos x$ **29.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **30.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac x2$ **31.** a **32.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **33.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac x2$ **34.** substituce $y=\operatorname{tg}x$

V. Vypočtěte následující integrály

1. $\int_0^2|1-x|\,dx$ **2.** $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$, $\alpha\in(0,\pi)$ **3.** $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon\in[0,1)$ **4.** $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$, $|a|<1$, $|b|<1$, $ab>0$ **5.** $\int_0^{\frac\pi2}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$, $ab\neq0$ **6.** $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$ **7.** $\int_0^{\log2}xe^{-x}\,dx$

8. $\int_0^{2\pi}x^2\cos x\,dx$ **9.** $\int_{\frac1e}^{e}|\log x|\,dx$ **10.** $\int_0^{\sqrt3}x\operatorname{arctg}x\,dx$ **11.** $\int_0^{\log2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ **12.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

13. $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ **14.** $\int_{-1}^1\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$ **15.** $\int_1^e(x\log x)^2\,dx$ **16.** $\int_0^1x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$ **17.** $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

18. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$ **19.** $\int_0^\pi e^x\cos^2x\,dx$ **20.** $\int_0^{\frac\pi2}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$ **21.** $\int_0^\pi\frac{\sin nx}{\sin x}$ **22.** $\int_0^\pi\cos^nx\cos nx$

Výsledky a návody. **1.** 1 **2.** $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ **3.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, substituce $t=\operatorname{cotg}\frac x2$ **4.** $-\frac1a\log\frac{1-a}{1+a}$ pokud $a=b$, $\frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$ pro $a\neq b$ (např. substituce $y=1-x$ a $t=\sqrt{\frac{(1-b)^2+2by}{(1-a)^2+2ay}}$) **5.** $\frac{\pi}{2|ab|}$ (např. $t=\operatorname{tg}x$) **6.** $200\sqrt2$ **7.** $\frac{1-\log2}{2}$ **8.** 4π **9.** $2-\frac2e$ **10.** $\frac23\pi-\frac{\sqrt3}{2}$ **11.** $2-\frac\pi2$ **12.** $\frac1{16}\pi a^4$ **13.** $\frac{\pi^2}{4}$ **14.** $\frac12\log3-\frac{\sqrt3}{6}\pi$ **15.** $\frac{5e^3-2}{27}$ **16.** $\frac{1+\sqrt2}{30}$ **17.** $\frac\pi6(4\sqrt3-3\sqrt2)$, substituce $t=\operatorname{cotg}\frac x2$ **18.** $2\pi\sqrt2$, např. substituce $t=\operatorname{tg}x$ na $(0,\frac\pi2)$ **19.** $\frac35(e^\pi-1)$ **20.** Vyjádřete sin a cos pomocí exponenciely (i v dalších příkladech). **21.** π pro n liché, 0 pro n sudé **22.** $\frac{\pi}{2^n}$

Test číslo 3 – první verze

1. Spočtěte (s využitím Taylorova rozvoje):

(17 bodů)
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}-1+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

Řešení. Pro $x\to+\infty$ platí:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{1}$$

Rozviňme v Taylorův polynom i první člen v závorce:

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}&=\frac{1}{e}\cdot\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{e}\cdot\exp\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\&=\exp\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\&=1+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}{2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\&=1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Dáme-li dohromady (1) a (2), pak výraz v závorce (v zadání) vyjádříme jako

$$1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}-1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{5}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

hledaná limita je tedy $\frac{5}{24}$.

2. Spočtěte primitivní funkci

(13 bodů)
$$\int\frac{x^3-8}{x^2+2x+65}\,\mathrm{d}x$$

3. Na maximálních intervalech existence vyjádřete následující primitivní funkci pomocí elementárních funkcí. Pokud používáte nějakou větu o substituci, podrobně vysvětlete její použití.

$$\int x\sin\sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}x$$

Výpočet … 10 bodů, zdůvodnění … 10 bodů.

TEST ČÍSLO 3 – DRUHÁ VERZE

1. Spočtěte (s využitím Taylorova rozvoje):

(17 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - 1 + \frac{1}{2}\log(1+x)\right)$$

2. Spočtěte primitivní funkci

(13 bodů)
$$\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+37}\,\mathrm{d}x$$

3. Na maximálních intervalech existence vyjádřete následující primitivní funkci pomocí elementárních funkcí. Pokud používáte nějakou větu o substituci, podrobně vysvětlete její použití.

$$\int (x+1)\cos\sqrt{x^2+2x+27}\,\mathrm{d}x$$

Výpočet ... 10 bodů, zdůvodnění ... 10 bodů.

Řešení. Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy má primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Nejprve integrál zjednodušme pomocí první substituční metody. Všimněme si, že integrand je ve tvaru $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, kde $\varphi(x) = x^2+2x+27$ a $f(y) = \frac{1}{2}\cos\sqrt{y}$. Funkce φ je spojitá a kladná na $\mathbb{R}$, má všude na $\mathbb{R}$ vlastní derivaci ($\varphi'(x) = 2x+2$), f je spojitá na $(0,+\infty)$. Podle první substituční metody tedy náš integrál převedeme na integrál

(*)
$$\int \frac{1}{2}\cos\sqrt{y}\,\mathrm{d}y.$$

Nyní použijme druhou substituční metodu, proveďme substituci „$y = z^2$“. Funkce $\psi(z) = z^2$ je spojitá a má vlastní nenulovou derivaci $\psi'(z) = 2z$ na intervalu $(0,+\infty)$ a zobrazuje tento interval na interval $(0,+\infty)$. Podle druhé substituční metody můžeme tedy počítat integrál

$$\int \frac{1}{2}\cos\sqrt{z^2}\cdot 2z\,\mathrm{d}z$$

na intervalu $(0,+\infty)$. Na tomto intervalu je $\sqrt{z^2} = z$, a tedy můžeme počítat (s využitím metody per partes)

$$\int \frac{1}{2}\cos\sqrt{z^2}\cdot 2z\,\mathrm{d}z = \int z\cos z\,\mathrm{d}z = z\sin z - \int \sin z\,\mathrm{d}z = z\sin z + \cos z + C$$

na $(0,+\infty)$. Nyní dosazením $\psi^{-1}(y) = \sqrt{y}$ za z dostaneme (podle druhé substituční metody), že integrál (*) se rovná
$$\sqrt{y}\sin\sqrt{y} + \cos\sqrt{y} + C, \qquad y \in (0,+\infty).$$

Nakonec za y dosadíme $\varphi(x) = x^2+2x+27$ a podle první substituční metody dostaneme, že integrál ze zadání se rovná

$$\sqrt{x^2+2x+27}\sin\sqrt{x^2+2x+27} + \cos\sqrt{x^2+2x+27} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Test číslo 3 – třetí verze

1. Spočtěte (s využitím Taylorova rozvoje):

(17 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x + \cos\left(x\sqrt{2}\right) - 2}{x^3}$$

2. Spočtěte primitivní funkci

(13 bodů)
$$\int \frac{x^3-31}{x^2-2x+26}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Integrand je racionální funkce, jmenovatel je kvadratický trojčlen bez reálných kořenů, čitatel má stupeň 3. Nejprve tedy vydělíme polynomy:

$$\frac{x^3-31}{x^2-2x+26} = x + \frac{2x^2-26x-31}{x^2-2x+26} = x+2+\frac{-22x-83}{x^2-2x+26}$$

Primitivní funkce k funkci $x+2$ je například $\frac{1}{2}x^2+2x$, zintegrujme tedy zbylý zlomek. Platí

$$\frac{-22x-83}{x^2-2x+26} = \frac{-11(2x-2)}{x^2-2x+26} + \frac{-105}{x^2-2x+26},$$

přičemž

$$\int \frac{-11(2x-2)}{x^2-2x+26}\,\mathrm{d}x = -11\log\left(x^2-2x+26\right)+C$$

a

$$\int \frac{-105}{x^2-2x+26}\,\mathrm{d}x = -105\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+25} = -\frac{105}{25}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-1}{5}\right)^2+1} = -21\operatorname{arctg}\frac{x-1}{5}+C;$$

tedy hledaná primitivní funkce je $\frac{1}{2}x^2+2x-11\log(x^2-2x+26)-21\operatorname{arctg}\frac{x-1}{5}+C$ na $\mathbb{R}$.

3. Na maximálních intervalech existence vyjádřete následující primitivní funkci pomocí elementárních funkcí. Pokud používáte nějakou větu o substituci, podrobně vysvětlete její použití.

$$\int x^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x^4+7}\,\mathrm{d}x$$

Výpočet … 10 bodů, zdůvodnění … 10 bodů.

VI. Rovnice se separovanými proměnnými

1. Nalezněte maximální řešení rovnice $y' = y$ procházející bodem $(0, 1)$.

2. Pro diferenciální rovnici $yy' + xy^2 = x$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1, 0)$.

3. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1, \frac{1}{2})$,
(c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.

4. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(0, 1)$.

5. Nalezněte řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$, které splňuje $y(-2) = -\frac{3}{5}$ a $y(0) = 1$.

6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v $\mathbb{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbb{R}$.

7. Řešte rovnici $y'(2 - e^x) = -3e^x \tan y \cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) - \lim_{x\to-\infty} y(x) = A?$$

Najděte všechna maximální řešení následujících rovnic

8. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ **9.** $xy' + y = y^2$ **10.** $y' = 10^{x+y}$ **11.** $e^{-y}(1 + y') = 1$

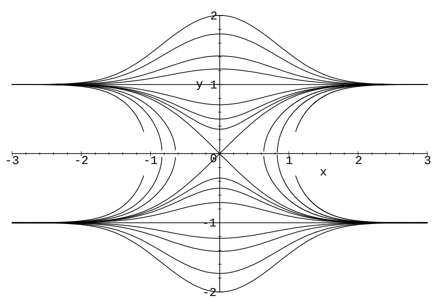
12. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, $x \in (-1, 1)$ (*na zbylých intervalech) **13.** $y' \sin x = y \ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

14. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$ **15.** $y - xy' = b(1 + x^2y')$, $y(1) = 1$ $(b \in \mathbb{R})$

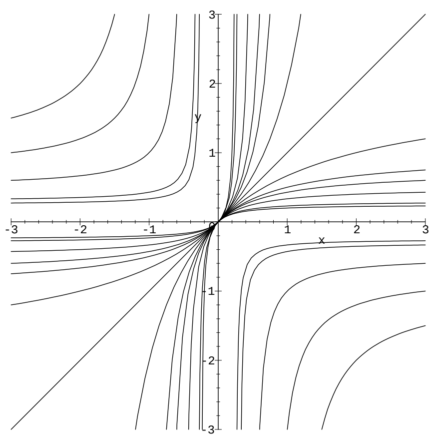
Výsledky a návody. **1.** $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. **2.** (a) singulární řešení $y_0^1 = 1$ na $\mathbb{R}$, $y_0^2 = -1$ na $\mathbb{R}$; $y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$, $y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$; $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^3(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$, $y_c^4(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$ pro $c > 1$; $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ a $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ pro $c < 0$ a $c \in (0, 1)$. (b) Takové řešení neexistuje. **3.** (a) $y_0^1 = 0$ na $(0, +\infty)$, $y_0^1 = 0$ na $(-\infty, 0)$; další řešení dána vzorečkem $y_c^j(x) = \frac{x}{1-cx}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j = 1, 2, 3$ definována na intervalech: pro $c > 0$ y_c^1 na $(-\infty, 0)$, y_c^2 na $(0, \frac{1}{c})$, y_c^3 na $(\frac{1}{c}, +\infty)$; pro $c < 0$ y_c^1 na $(-\infty, \frac{1}{c})$, y_c^2 na $(\frac{1}{c}, 0)$, y_c^3 na $(0, +\infty)$. (b) $y_{-1}^3(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (0, \infty)$. (c) Omezená jsou y_0^1, y_0^2, y_c^1 pro $c > 0$, y_c^3 pro $c < 0$. **4.** (a) $y_c^1(x) = \mathrm{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1 + x^2))$, $x \in (\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1})$, $y_c^2(x) = \mathrm{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1 + x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, -\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1})$ pro $c \geq \frac{\pi}{2}$; $y_c(x) = \mathrm{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1 + x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1})$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(1 + x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1})$. **5.** Takové řešení neexistuje. Všechna maximální řešení jsou: $y_s = 0$ na $\mathbb{R}$; $y_{s,c} = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ (\frac{3}{5}(x - c))^{\frac{5}{3}} & x \in (c, +\infty) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$; $y_{c,s} = \begin{cases} 0 & x \in (c, +\infty] \\ (\frac{3}{5}(x - c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$;
$y_{c,d} = \begin{cases} (\frac{3}{5}(x - c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, d] \\ (\frac{3}{5}(x - d))^{\frac{5}{3}} & x \in (d, +\infty) \end{cases}$ pro $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$. **6.** $y_c = \log(\sin x + c)$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c > 1$; $y_c^k = \log(\sin x + c)$, $x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k + 1)\pi + \arcsin c)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in (-1, 1]$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}$. **7.** $y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}(a(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \mathrm{arctg}(b(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi, \pi)$. **8.** $y_c = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c < -\frac{1}{4}$; $y_{-1/4}^{1,2} = -\sqrt[3]{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; $y_c^{1,2,3} = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c}, \infty)$, pro $c > -\frac{1}{4}$. **9.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = \frac{1}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **10.** $y_c = -\log_{10}(c - 10^x)$, $x \in (-\infty, \log_{10} c)$, pro $c > 0$. **11.** $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^1 = -\log(1 + e^{x-c})$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$; $y_c^2 = -\log(1 - e^{x-c})$, $x \in (-\infty, -c)$, pro $c \in \mathbb{R}$. **12.**

$y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1$, $x \in (-1,1)$; $y_{\frac{\pi}{2}} = 1$, $x \in (-1,1)$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$ pro $c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}$, pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}} = -x$, $x \in (-1,1)$. **13.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^k = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0. **14.** $y_0 = x$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty^{1,2} = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0,\infty)$; $y_c^{1,2} = \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1. **15.** Pro $b = 0$: $y_c = cx$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1. Pro $b \neq 0$: $y_0 = b$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = b + \frac{cx}{1+bx}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$ nebo $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0, pokud $b = 1$; neexistuje, pokud $b = -1$; $y^1_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b < -1$; $y^2_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b \in (-1,1) \cup (1,\infty)$.

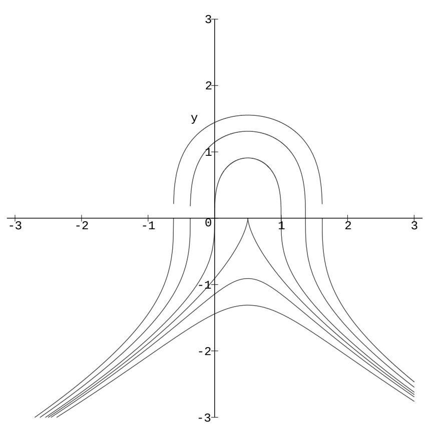
2.



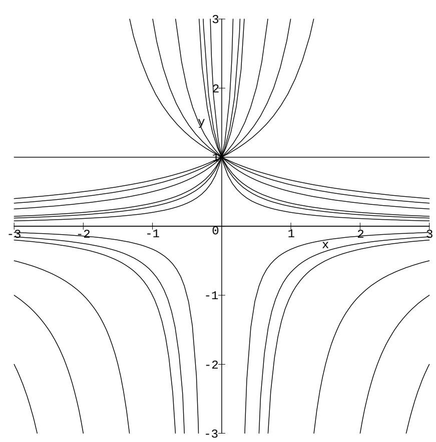
3.



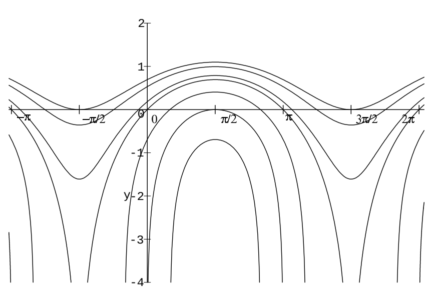
8.



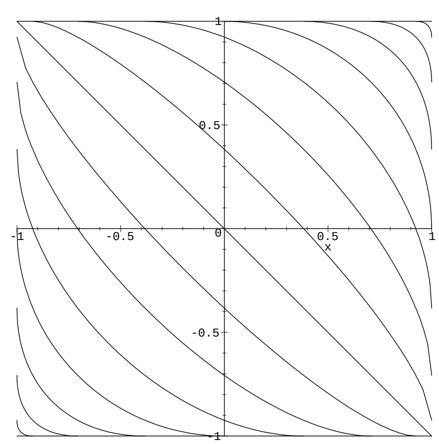
9.



6.



12.



VII. Vyšetřete konvergenci Newtonových integrálů

1. a) $\int_0^1 x^{\log x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 x^{-\log x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ **4.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$

5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{e^{\sin x}-1}$ **6.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x-\cos x}$ **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int_\alpha^\beta \frac{\arcsin^2(\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^q x(1-\sin x)^p}$ **11.** $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ **12.** $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ **13.** $\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$

14. $\int_{e+1}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ **15.** $\int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int_1^\infty x^k\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

18. $\int_0^\infty x^\alpha\operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\beta\operatorname{tg}^\gamma x\,\mathrm{d}x$

- -

Výsledky a návody. **1.** a) diverguje, b) konverguje **2.** konverguje **3.** diverguje **4.** konverguje **5.** konverguje **6.** diverguje **7.** konverguje **8.** konverguje, pokud $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, diverguje, je-li jedno z α,β nekonečné **9.** konverguje, pokud $p<1$ a $q<1$ **10.** konverguje, pokud $q<1$ a $p<\frac{1}{2}$ **11.** konverguje, pokud $p>1$ a $q<1$ **12.** konverguje, pokud $p>1$ nebo $p=1$ & $q>1$ **13.** konverguje, pokud $p>1$ & $r<1$ nebo $p=1$ & $q>1$ & $r<1$ **14.** konverguje, pokud $p>1$ nebo $p=1$ & $q>1$ nebo $p=q=1$ & $r>1$ **15.** konverguje, pokud $-1<k<t-1$ nebo $-1>k>t-1$ **16.** konverguje, pokud $m<3$ **17.** konverguje, pokud $k<-1$ **18.** konverguje, pokud $\alpha<-1<\alpha+\beta$ **19.** konverguje, pokud $\alpha+\gamma>-1$ a $\beta-\gamma>-1$

==

VIII. Zjistěte, zda existují limity, a existují-li, spočtěte je

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ **4.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ **7.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ **8.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to3}} \frac{\sin xy}{x}$ **10.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Lze následující funkce spojitě rozšířit na celou rovinu ?

11. $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **12.** $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **13.** $\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$ **14.** $\frac{\sin xy}{x}$

- -

Výsledky a návody. **1.** 2 **2.** 0 **3.** 0 **4.** Neexistuje – funkce není definovaná na prstencovém okolí bodu $(0,0)$. Limita přes množinu $\{(x,y): x\neq0\neq y\}$ je $+\infty$. **5.** 0 **6.** 1 **7.** Neexistuje. **8.** Neexistuje, protože funkce není definovaná na prstencovém okolí bodu $(0,0)$. Limita přes množinu $\{(x,y): x\neq0\neq y\}$ je 0. **9.** Neexistuje, protože funkce není definovaná na prstencovém okolí bodu $(0,3)$. Limita přes množinu $\{(x,y): x\neq0\}$ je 3. **10.** 1 **11.** Ne. **12.** Ano. $f(0,0)=0$ **13.** Ano. $f(0,0)=0$ **14.** Ano. $f(0,y)=y$

IX. Zkoumejte existenci a hodnotu parciálních derivací a diferenciálu (ev. spojitě dodefinované, lze-li to udělat) funkce $f(x,y) =$

1. $\sqrt{x^2+y^2}$ **2.** $\sqrt[3]{x+y^2}$ **3.** $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ **4.** $\sqrt[3]{x^2+y}\cdot\ln(x^2+y^2)$ **5.** $|x|\cdot|y|$ **6.** $\sqrt[3]{xy}$

7. $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ **8.** $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ **9.** $e^{\frac{-1}{x^2+y^2+xy}}$ **10.** $\frac{x^2y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}$

11. Nechť $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Spočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

12. Spočtěte $\delta f((1,1,1),v)$, kde $v = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ a $f(x,y,z) = x^y + y^z$.

13. Nechť $f(s,t)$ je kladná funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce g pomocí hodnot a derivací funkce f, pokud je (a) $g(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}$, b) $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$.

14. Nechť f má diferenciál v bodě $(1,1)$ a nechť $f(1,1) = f_1'(1,1) = 1$, $f_2'(1,1) = 2$. Položme $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1)$.

15. Nechť $f(r,\varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, funkce g má diferenciál v bodě $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial\varphi}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) = 4$. Spočtěte $g_1'(1,1)$, $g_2'(1,1)$.

16. Převeďte do polárních souřadnic rovnici a) $x\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + y\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

***17.** Převeďte do sférických souřadnic rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

18. Transformujte do polárních souřadnic rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}$ (t.j. napište odpovídající rovnici pro $r = r(\varphi)$).

Výsledky a návody. **1.** Mimo $(0,0)$ diferencovatelná, v $(0,0)$ neexistují parciální derivace. **2.** Diferencovatelná kromě bodů $(-y^2,y)$, $y\in\mathbb{R}$, v nich neexistují parciální derivace. **3.** Diferencovatelná mimo body $(x,\frac{1}{x})$. V těchto bodech nelze spojitě dodefinovat. **4.** V $(0,0)$ spojitě dodefinovat 0. Mimo body $(x,-x^2)$ diferencovatelná. V $(x,-x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2+x^4\neq 1$, pokud $x^2+x^4 = 1$, je tam diferenciál 0. **5.** Pro $x\neq 0, y\neq 0$ diferencovatelná. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje pro $x\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y\neq 0$; v $(0,0)$ je diferenciál 0. **6.** Pro $x\neq 0, y\neq 0$ diferencovatelná. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje pro $x\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y\neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale diferenciál neexistuje. **7.** Mimo body $(x,-x)$ diferencovatelná. V bodech $(x,-x)$, $x\neq 0$ neexistují parciální derivace. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, ale diferenciál neexistuje. **8.** V $(0,0)$ dodefinovat 0, diferencovatelná všude (v $(0,0)$ je diferenciál 0). **9.** V $(0,0)$ dodefinovat 0, diferencovatelná všude (v $(0,0)$ je diferenciál 0). **10.** V $(0,0)$ dodefinovat 0. Mimo $(0,0)$ diferencovatelná. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale diferenciál neexistuje. **11.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = 1$ **12.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **13.** (a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\cdot(\log f(x,y)+1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial s}(x,y)\cdot(\log f(x,y)+1)$, (b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial s}(y,x)\log f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\cdot\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial t}(y,x)\log f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial s}(x,y)\cdot\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)$ **14.** 4 **15.** $g_1' = -2$, $g_2' = 2$. **16.** (a) $r\sin 2\varphi\frac{\partial u^*}{\partial r} + \cos 2\varphi\frac{\partial u^*}{\partial\varphi} = 0$ (b) $\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} = 0$ **17.** $\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\vartheta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\operatorname{cotg}\vartheta\frac{\partial u^*}{\partial\vartheta} = 0$ (přičemž $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$) **18.** $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r$

X. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z; M = [-1;1]\times[-1;1]\times[-1;1]$;

2. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a>0, b>0; M = \{(x,y)\,; x^2+y^2 \le 1\}$; **3.** a) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ b) $f(x,y) = \left(5x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+3y^2\right)}$; $M = \mathbb{R}^2$; **4.** $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z; M = \mathbb{R}^3$;

5. $f(x,y) = x^2-xy+y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \le 1\}$

6. $f(x,y) = (x+y)\,e^{-2x-3y}; M = \{(x,y)\,; x>0, y>0\}$

7. $f(x,y,z) = x-2y+2z$,
a) $M = \{(x,y,z)\,, x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{(x,y,z)\,, x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$

8. $f(x,y,z) = xyz$, M jako v předchozím příkladu.

9. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{(x,y,z)\,; x+y+z = \frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0\}$

10. $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $M = \{(x,y,z)\,; x+2y+3z = a, x>0, y>0\}$, kde $a>0$.

11. $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^p + \dots + x_n^p$; $M = \{(x_1,\dots,x_n)\,; x_1+\dots+x_n = a,\ x_1>0,\ \dots, x_n>0\}$; kde $a>0, p>0$. **12.** $f(x,y) = x+y$, $M = \{(x,y)\,; x^3+y^3-2xy = 0, x\ge 0, y\ge 0\}$

13. $f(x,y,z) = 10z+x-y$, $M = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 \le 1, y+x \ge 0\}$ **14.** $f(x,y) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $M = \{(x,y), \frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2} = 1\}$ **15.** $f(x,y) = y$, $M = \{(x,y), \left(x^2+y^2\right)^2 = Kxy\}$, kde $K>0$

Výsledky a návody. **1.** max 5 v bodech $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, min -1 v bodě $(0,0,-1)$ **2.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ **3.** (a) min 0 v $(0,0)$, max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2+y^2 = 1$, (b) min 0 v $(0,0)$, max $\frac{5}{e}$ v bodech $(\pm 1,0)$. **4.** sup $+\infty$, min -14 v bodě $(-1,-2,3)$ **5.** max 1 v bodech $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$, min 0 v $(0,0)$ **6.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se. **7.** a) max 3 v $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, min -3 v $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(\frac{2}{\sqrt{78}},-\frac{7}{\sqrt{78}},\frac{5}{\sqrt{78}})$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $(-\frac{2}{\sqrt{78}},\frac{7}{\sqrt{78}},-\frac{5}{\sqrt{78}})$; **8.** a) max $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v bodech $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$,
$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$; b) max $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$; min $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ v bodech $(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$; **9.** max $\frac{1}{8}$ v $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$, inf 0, nenabývá se **10.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $(\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6})$, inf $-\infty$ **11.** pro $p = 1$ je f na M konstantní; pro $p>1$ je sup a^p, nenabývá se, min $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$; pro $p\in(0,1)$ je inf a^p, nenabývá se, max $\frac{a^p}{n^{p-1}}$ v $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$; **12.** max 2 v $(1,1)$, min 0 v $(0,0)$ **13.** max $\sqrt{102}$ v $(\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{10}{\sqrt{102}})$; min $-\sqrt{102}$ v $(-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{10}{\sqrt{102}})$; **14.** max $\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(\frac{\sqrt{5}}{2},2\sqrt{5})$; min $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ v $(-\frac{\sqrt{5}}{2},-2\sqrt{5})$; **15.** max $\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15},\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}})$; min $-\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}}$ v $(-\frac{1}{4}\sqrt{k}\sqrt[4]{15},-\frac{1}{4}\sqrt{k}\cdot 15^{\frac{3}{4}})$.

Test číslo 4 – první verze

1. Nechť $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases} \quad$ kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

a) Určete, pro která α je f spojitá na $\mathbb{R}^2$. (8 bodů)
b) Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pro všechna α, pro něž tyto derivace existují. (6 bodů)
c) Určete, pro která α má f v bodě $(0,0)$ totální diferenciál. (7 bodů)

Řešení.
(a) Funkce f je zřejmě spojitá ve všech bodech mimo osu y. Stačí tedy zkoumat spojitost v bodech osy y. Pro $x \neq 0$ platí $f(x,0) = |x|^{\alpha-2}$. Je-li f spojitá na $\mathbb{R}^2$, je spojitá i v bodě $(0,0)$, a tedy platí $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\alpha-2} = 0$, což platí právě pro $\alpha > 2$. Tedy pro $\alpha \leq 2$ funkce f není spojitá. Nyní předpokládejme, že $\alpha > 2$. Pak pro $x \neq 0$ platí:

$$0 \leq f(x,y) = |x|^{\alpha-2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x|^{\alpha-2},$$

a tedy pro každé $y_0 \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to y_0 \\ x\neq 0}} f(x,y) = 0,$$

a tedy i

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = 0,$$

tudíž f je spojitá na $\mathbb{R}^2$.
Závěr. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2$, právě když $\alpha > 2$.
(b) Protože $f(0,y) = 0$, je $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Derivaci dle x počítejme z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha-2}}{x} = \lim_{x\to 0} |x|^{\alpha-3} \cdot \operatorname{sgn} x \begin{cases} = 0 & \alpha > 3 \\ \text{neexistuje} & \alpha \leq 3 \end{cases}$$

(c) Pro $\alpha \leq 3$ totální diferenciál neexistuje, protože neexistuje parciální derivace podle x. Předpokládejme tedy, že $\alpha > 3$. Pak jsou obě parciální derivace v bodě $(0,0)$ nulové, a tedy totální diferenciál, existuje-li, musí být rovněž nulový. Zda nulové zobrazení je totálním diferenciálem, zjistíme z definice – uvažme limitu

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{|x|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Platí

$$0 \leq \frac{|x|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq |x|^{\alpha-3} \frac{|x|^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq |x|^{\alpha-3},$$

a protože $\alpha > 3$, je ona limita nulová, diferenciál tudíž existuje.
Závěr. Totální diferenciál existuje, právě když $\alpha > 3$ (a je pak nulový).
2. Nechť diferencovatelné funkce $r(x,y)$ a $\phi(x,y)$ splňují rovnice $x = e^{2r}\cos\phi$, $y = e^{5r}\sin\phi$. Spočtěte $\frac{\partial r}{\partial x}(1,0)$ a $\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,0)$ (13 bodů)

3. Najděte minimum funkce $f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2$ na množině $M = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$.
(16 bodů)

Test číslo 4 – druhá verze

1. Nechť $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|^{-\alpha}}{x^2+y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0, \end{cases} \quad$ kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

a) Určete, pro která α je f spojitá na $\mathbb{R}^2$. (8 bodů)
b) Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pro všechna α, pro něž tyto derivace existují. (6 bodů)
c) Určete, pro která α má f v bodě $(0,0)$ totální diferenciál. (7 bodů)

2. Nechť diferencovatelné funkce $r(x,y)$ a $\phi(x,y)$ splňují rovnice $x = e^{6r}\cos\phi$, $y = e^{9r}\sin\phi$. Spočtěte $\frac{\partial r}{\partial x}(0,1)$ a $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,1)$ (13 bodů)

Řešení. Dosadíme-li do rovnic $x = 0$ a $y = 1$, dostaneme

$$0 = e^{6r(0,1)}\cos(\phi(0,1)) \qquad \text{a} \qquad 1 = e^{9r(0,1)}\sin(\phi(0,1)).$$

Dle první rovnosti je tedy $\cos(\phi(0,1)) = 0$, tudíž $\sin(\phi(0,1)) = \pm 1$. Z druhé rovnosti díky tomu, že $e^t > 0$ pro všechna t, plyne $\sin(\phi(0,1)) = 1$ a $r(0,1) = 0$. Zderivujme rovnice ze zadání podle x. Dostaneme

$$1 = 6e^{6r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\cos\phi - e^{6r}\sin\phi\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \text{a} \qquad 0 = 9e^{9r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\sin\phi + e^{9r}\cos\phi\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Dosadíme $x = 0$ a $y = 1$. Máme tedy

$$1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,1) \qquad \text{a} \qquad 0 = 9\frac{\partial r}{\partial x}(0,1),$$

tudíž $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,1) = -1$ a $\frac{\partial r}{\partial x}(0,1) = 0$.

3. Najděte minimum funkce $f(x,y) = x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2$ na množině $M = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$. (16 bodů)

Test číslo 4 – třetí verze

1. Nechť $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|^{\alpha}}{x^4+y^4} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0, \end{cases} \quad$ kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

a) Určete, pro která α je f spojitá na $\mathbb{R}^2$. (8 bodů)
b) Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pro všechna α, pro něž tyto derivace existují. (6 bodů)
c) Určete, pro která α má f v bodě $(0,0)$ totální diferenciál. (7 bodů)

2. Nechť diferencovatelné funkce $r(x,y)$ a $\phi(x,y)$ splňují rovnice $x = e^{r}\cos\phi$, $y = e^{13r}\sin\phi$. Spočtěte $\frac{\partial r}{\partial y}(0,-1)$ a $\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,-1)$ (13 bodů)

3. Najděte maximum funkce $f(x,y) = 2x^2 - 10xy - 7y^2$ na množině $M = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 2\}$. (16 bodů)

Řešení. Funkce f je spojitá, množina M kompaktní, a tedy maximum existuje. Pokud se nabývá uvnitř M, je v příslušném bodě lokální extrém, a tedy $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Přitom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 10y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -10x - 14y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové jen v bodě $(0,0)$ a $f(0,0) = 0$.
Dále musíme vyšetřit hranici množiny M. Skládá se ze čtyř úseček. Vyšetřeme jednu po druhé.
(i) $x + y = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Pak tedy $y = 2 - x$, na této úsečce má funkce tvar $f(x, 2-x) = 5x^2 + 8x - 28$. Je-li extrém ve vnitřním bodě úsečky, pak derivace musí být nulová, neboli $10x + 8 = 0$, což na této úsečce nenastane.

(ii) $x-y=2$, $x\ge 0$, $y\le 0$. Pak $y=x-2$, $f(x,x-2)=-15x^2+48x-28$, derivace je $-30x+48$, nulová je pro $x=\frac{8}{5}$. Pak $y=-\frac{2}{5}$. Platí $f(\frac{8}{5},-\frac{2}{5})=\frac{52}{5}$.
(iii) $-x-y=2$, $x\le 0$, $y\le 0$. Pak tedy $y=-2-x$, na této úsečce má funkce tvar $f(x,2-x)=5x^2-8x-28$. Derivace je $10x-8$, což na této úsečce nenabývá hodnoty 0.
(iv) $-x+y=2$, $x\le 0$, $y\ge 0$. Pak $y=x+2$, $f(x,x+2)=-15x^2-48x-28$, derivace je $-30x-48$, nulová je pro $x=-\frac{8}{5}$. Pak $y=\frac{2}{5}$. Platí $f(-\frac{8}{5},\frac{2}{5})=\frac{52}{5}$.
Nakonec zbývá vyšetřit krajní body uvažovaných úseček. Platí $f(2,0)=f(-2,0)=8$, $f(0,2)=f(0,-2)=-28$.
Největší hodnota je tedy $\frac{52}{5}$ a nabývá se ve dvou bodech $(-\frac{8}{5},\frac{2}{5})$ a $(\frac{8}{5},-\frac{2}{5})$.

==

XI. Implicitní funkce

1. Je dán vztah $e^{xy}+\sin y+y^2=1$ a bod $[2,0]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y=f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2)=0$;
b) napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.
2. Je dán vztah $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$ a bod $[1,-2,1]$:
a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z=z(x,y)$ v jistém okolí U bodu $[1,-2]$, pro kterou platí $z(1,-2)=1$; b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;
c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z=z(x,y)$ v bodě $[1,-2]$.
3. Je dána vztah $x^2+2xy^2+y^4-y^5=0$ a bod $[0,1]$. Dokažte, že
a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y=f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0)=1$; b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.
4. Dokažte, že množina bodů $(x,y,z)\in\mathbb{R}$, které splňují vztah

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$$

je v okolí bodu $(1,1,1)$ popsatelná jako graf funkce $f(x,y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1,1)=1$. Určete totální diferenciál v bodě (1,1) a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.
5. Nechť x_0 je jednonásobný kořen rovnice $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$. Dokažte, že existují $\varepsilon>0$ a $\delta>0$ takové, že kdykoli $|b_i-a_i|<\delta$ pro $i=1,\ldots,n$, pak rovnice $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$ má v intervalu $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ právě jeden kořen. Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial a_i}(a_1,\ldots,a_n)$.
6. Co se stane, bude-li v předchozím příkladě kořen x_0 p-násobný?
7. Dokažte, že existují funkce $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$, pro které platí $u(1,2)=v(1,2)=0$, a které na nějakém okolí bodu $(1,2)$ splňují rovnice $xe^{u+v}+2uv=1$, $ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^1$. Spočtěte jejich diferenciál v bodě $(1,2)$.
8. Dokažte, že existují funkce $z=z(x,y)$ a $t=t(x,y)$, pro které platí $z(1,-1)=0$ a $t(1,-1)=2$, a které na nějakém okolí bodu $(1,-1)$ splňují rovnice $x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-t^3=0$, $x+y+z-t-2=0$ a jsou tam třídy $\mathcal{C}^2$. Spočtěte druhý diferenciál funkce z v bodě $(1,-1)$.
9. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ „v bodě $u=2$, $v=1$“, jestliže $x=u+v^2$, $y=u^2-v^3$, $z=2uv$.
10. Najděte rovnici tečné roviny k ploše $e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}$ v bodě $(1,1,0,\frac{\pi}{4})$.

- -

Výsledky a návody. **1.** tečna: $y=0$ **2.** tečná rovina $z=\frac{7}{5}(y+2)+1$ **3.** Spočtěte $f'(0)$ a ověřte, že $f'(0)>0$. **4.** tečná rovina $z=-(x-1)-(y-1)+1$ **5.** Označme levou stranu $P(x)$. Využijte toho, že fakt, že x_0 je jednonásobný kořen P znamená $P(x_0)=0$ a $P'(x_0)\ne 0$. $\frac{\partial x}{\partial a_i}=-\frac{x_0^{n-i}}{P'(x_0)}$. **6.** Pro sudé p analogie neplatí, pro liché p zkoumejte $\sqrt[p]{P(x)}$. **7.** $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=1$ **8.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{6}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$. **9.** $-\frac{1}{242}$ **10.** $u=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)$, $v-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)+(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})(y-1)$