I. Vyjádřete primitivní funkce pomocí elementárních funkcí na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3+2x+\frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x+16e^{8x}-\frac{1}{x}+3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$
10. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
15. $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$ **18.** $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)}$
21. $\int \frac{x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ **22.** $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x\log\log x}$ **24.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ **25.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ **26.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$
27. $\int \log x\,\mathrm{d}x$ **28.** $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ **29.** $\int \frac{\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$ **30.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a,b\in\mathbb{R}$ **31.** $\int x^\alpha\log x\,\mathrm{d}x$
32. $\int x^3\log^2 x\,\mathrm{d}x$ **33.** $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **34.** $\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. **1.** $\frac14 x^4+x^2+16\log|x|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x+2e^{8x}-\log|x|+3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $-\frac14(1-3x)^{\frac43}$, na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac92\sqrt[3]{x^2}+\frac95x^{\frac53}-\frac38x^{\frac83}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **5.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$ **6.** $\frac18\sin^8 x$ na $\mathbb{R}$ **7.** $-\frac12e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ **8.** $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.** $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **10.** $\frac14|x|\cdot x^3$, na $\mathbb{R}$ **11.** $\sin\left(x-\pi\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac12\right]\right)+2\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac12\right]$, na $\mathbb{R}$ **12.** $F(x)=$

$$\begin{cases} 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[-\infty,-x_2] \\ -\pi(x+x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{8}{\pi}x_1) & x\in[-x_2,-x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1] \\ \pi(x-x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{8}{\pi}x_1) & x\in[x_1,x_2] \\ 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{matrix} x_1=\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2=\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{matrix}, \text{ na } \mathbb{R}$$

13. $\frac{-10\cdot5^{-x}\log2+2^{-x}\log5}{5\log5\log2}$, na $\mathbb{R}$ **14.** $\frac12e^{2x}-e^x+x$, na $\mathbb{R}$ **15.** $\operatorname{tg}x-x$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **16.** $-\operatorname{cotg}x-x$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **17.** $\frac{1}{\sqrt6}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt6}{2}$, na $\mathbb{R}$ **18.** $\frac{x}{2}-\frac14\sin2x$, na $\mathbb{R}$ **19.** $\frac38x+\frac38\sin x\cos x+\frac14\sin x\cos^3x$, na $\mathbb{R}$ **20.** $\frac13\operatorname{tg}(x^3)$, na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi},\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi})$, $k\in\mathbb{Z}$ **21.** $\frac18\log(1+4x^2)$, na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac12\operatorname{arctg}(x^2)$, na $\mathbb{R}$ **23.** $\log|\log\log x|$, na $(1,e)$ a na (e,∞) **24.** $\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **25.** $-\log\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\right|$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **26.** $(x-1)e^x$ na $\mathbb{R}$ **27.** $x\log x-x$ na $(0,\infty)$ **28.** $x\operatorname{arctg}x-\frac12\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **29.** $-\frac12e^{-x}\cdot(\sin x+\cos x)$, na $\mathbb{R}$ **30.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx+b\sin bx)$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2\neq0$; x na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **31.** $\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\cdot\left(\log x-\frac{1}{1+a}\right)$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha\neq1$; $\frac12\ln^2x$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha=-1$ **32.** $\frac14x^4\ln^2x-\frac18x^4\ln x+\frac{1}{32}x^4$, na $(0,\infty)$ **33.** $2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)$, na $(0,\infty)$ (substituce $x=y^2$ a pak per partes) **34.** $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$, na $\mathbb{R}$ (per partes)

II. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int \frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ pomocí $x = \operatorname{tg} y$ **7.** $\int \frac{x^8+x-1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3x+4)^2}$
9. Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$? **10.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **11.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **12.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **13.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$
14. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int \frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ **18.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$
19. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$ **21.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ **22.** $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
23. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ **24.** $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ **25.** $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}$ **26.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$
27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$ **28.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$ **29.** $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **30.** $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$
31. $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ **32.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ **33.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon > 0$ **34.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Výsledky a návody. **1.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right) - 4\log|x-1|$, $x \in (-\infty,1)$ nebo $x \in (1,+\infty)$ **2.** $\left(\sum_1^{8}\frac{1}{2k}x^{2k}\right) - 2\log|x-1| + 3\log|x+1|$, $x \in (-\infty,-1)$ nebo $x \in (-1,1)$ nebo $x \in (1,+\infty)$ **3.** $x + \frac{1}{6}\log|x| - \frac{9}{2}\log|x-2| + \frac{28}{3}\log|x-3|$, $x \in (-\infty,0)$ nebo $x \in (0,2)$ nebo $x \in (2,3)$ nebo $x \in (3,+\infty)$ **4.** $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x \in (-\infty,1)$ nebo $x \in (1,+\infty)$ **5.** $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)$ **6.** $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ **7.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\log(x^2-x\sqrt{3}+1) - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\log(x^2+x\sqrt{3}+1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$
8. $\frac{1}{7}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+4} + \frac{4\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$ **9.** $a + 2b + 3c = 0$ **10.** $6\left(\frac{1}{9}u^{(3/2)} - \frac{1}{8}u^{(4/3)} + \frac{1}{7}u^{(7/6)} - \frac{1}{6}u + \frac{1}{5}u^{(5/6)} - \frac{1}{4}u^{(2/3)}\right)$, kde $u = x+1$, $x \in (-1,+\infty)$ **11.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \in (-1,1)$ **12.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$, kde $u = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \in (-\infty,-1)$ nebo $x \in (-1,0)$ nebo $x \in (1,+\infty)$ **13.** $t = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ **14.** $t = \sqrt[6]{x+1}$ **15.** $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **16.** $\log(e^x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ **17.** $e^x - \log(1+e^x)$ **18.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}} - \log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x \in \mathbb{R}$
19. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x \in (-\infty,1-\sqrt{2})$ nebo $x \in (1+\sqrt{2},+\infty)$
20. $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt{2}}$, kde $t = \sqrt{x^2+2x+4} - x$, $x \in \mathbb{R}$ **21.** $\operatorname{argsinh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(1,+\infty)$ **23.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$ na $(-1,1)$ **24.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x$ **25.** a **26.** substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **27.** substituce $y = \operatorname{tg} x$ **28.** substituce $y = \cos x$ **29.** substituce $y = \operatorname{tg} x$ **30.** substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$
31. a **32.** substituce $y = \operatorname{tg} x$ **33.** substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **34.** substituce $y = \operatorname{tg} x$

III. Aplikace určitého integrálu
(všechny parametry jsou kladné)

1. Najděte obsahy ploch ohraničených křivkami:
(a) $ax = y^2$, $ay = x^2$ (b) $y = x^2$, $x+y = 2$ (c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ (d) $Ax^2+2Bxy+Cy^2 = 1$ $(AC-B^2 > 0)$

2. Spočtěte délky křivek
(a) $y = x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \le x \le 4)$ (b) $y = e^x$, $(0 \le x \le x_0)$ (c) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\log y$ $(1 \le y \le e)$
(d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (e) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ (f) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$

3. Spočtěte objemy a povrchy následujících těles vzniklých rotací: (a) Plochy ohraničené parabolou $y^2 = 4x$ a přímkou $x = 1$ okolo osy x. (b) Elipsy s polosami a, b okolo jedné z jejích os. (c) Plochy ohraničené parabolami $y = x^2$ a $x = y^2$ kolem osy I. kvadrantu. (d) Pravidelného šestiúhelníku o straně a okolo jedné z jeho stran.

Výsledky a návody. **1.** (a) $\int_0^a(\sqrt{ax} - \frac{1}{a}x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^2$ (b) $\int_{-2}^1(2 - x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$; (c) $\int_{-a}^a 2b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\,\mathrm{d}x = \pi ab$; (d) $\int_{-\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}}^{\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}} \frac{2}{C}\sqrt{C-(AC-B^2)x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$

2. (a) $\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{80\sqrt{10}-8}{27}$; (b) $\int_0^{x_0} \sqrt{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \log(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^{2x_0}-1}}{\sqrt{1+e^{2x_0}+1}}$; (c) $\int_1^e \sqrt{1+(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y})^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}(e^2+1)$; (d) $2\int_{-a}^a \sqrt{1+(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}}} = 6a$; (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16\cos^6 t\sin^2 t + 16\sin^6 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 1+\frac{\sqrt{2}}{4}\log(3+2\sqrt{2})$; (f) $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t} = 2a\pi^2$; **3.** (a) objem: $\pi\int_0^1 4x\,\mathrm{d}x = 2\pi$; povrch pláště: $2\pi\int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$; celkový povrch je o 4π větší; (b) objem: $\pi\int_{-a}^a b^2(1-\frac{x^2}{a^2})\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi ab^2$ (rotuje se okolo osy délky $2a$); povrch: $2\pi\int_{-a}^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^4(1-\frac{x^2}{a^2})}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi b(b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}), & a > b, \\ 4\pi b^2, & a = b, \\ 2\pi b(b+\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}), & a < b; \end{cases}$ (c) je to stejné, jako rotace grafu funkce $f(x) = x + \frac{1-\sqrt{1+4t\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$, $x \in [0, \sqrt{2}]$ okolo osy x; objem: $\frac{\pi\sqrt{2}}{60}$; povrch $\frac{\sqrt{2}}{24} - \frac{13\sqrt{10}}{192} - \frac{\sqrt{2}}{128}\log(2+\sqrt{5})$; (d) objem: $\pi(\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^0((\frac{\sqrt{3}}{2}x + a\sqrt{3})^2 - \frac{3}{4}x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^a 3a^2\,\mathrm{d}x + \int_a^{a(a+\frac{\sqrt{3}}{2})}((a\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-a))^2 - \frac{3}{4}(x-a)^2)\,\mathrm{d}x) = 3\pi a^3(\sqrt{3}+\frac{1}{4})$; povrch: $2\pi(\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^0(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x + a\sqrt{3})\frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^a a\sqrt{3}\,\mathrm{d}x + \int_a^{a(a+\frac{\sqrt{3}}{2})}(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-a) - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-a) + a\sqrt{3})\frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi a^2(3\sqrt{7}+4\sqrt{3})$

IV. Stejnoměrná konvergence a její aplikace

1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí: (a) $x^{n+1}-x^{n-1}$, $x \in \langle 0,1\rangle$, (b) $x^n - x^{3n}$, $x \in \langle 0,1\rangle$, (c) $\frac{1}{x+n}$, $x \in \mathbf{R}$, (d) $\frac{nx}{1+n+x}$, $x \in \langle 0,1\rangle$, (e) $\frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in \langle 0,+\infty)$, (f) $\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \langle 0,+\infty)$, (g) $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, (h) $\frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbf{R}$, (i) $\sin\frac{x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$, (j) $n \cdot \left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, $x \in \langle 0,\infty)$.

2. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řad: (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{1+k^5x^2}$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)$, (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$, (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+2^k}$, (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+k^3}$, (f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\sin x}$, (g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \sin\frac{1}{3^k x}$, (h)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ (i)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ (j)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin kx}{\sqrt{k+x}}$ (k)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \operatorname{arctg}(kx+k)$

3. Spočtěte limity: (a) $\lim\limits_{x\to 1-} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{x^k}{x^k+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1-} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k+1})$ (c) $\lim\limits_{x\to 0+} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^x}$

4. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže (a) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, (b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, (c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$? Jak je to se stejnoměrnou konvergencí f_n na $(0,1)$?

5. Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ má na intervalu $(1,\infty)$ derivace všech řádů.

6. Nechť $\mathbf{a} = \{a_k\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Položme $\zeta_{\mathbf{a}}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^x}$. Co lze říci o definičním oboru, spojitosti a derivacích funkce $\zeta_{\mathbf{a}}$? (*Jak je to v případě, že $\mathbf{a} = \{a_k\}$ je posloupnost reálných, ne nutně nezáporných čísel?)

7. Nechť $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^p + x^2 k^q}$, kde $p, q \geq 0$. Dokažte, že
(i) f je spojitá na $(0,\infty)$, pokud $\max(p,q) > 1$, (ii) f je spojitá na $\mathbb{R}$, pokud $p+q > 2$.
(iii) Vyšetřete definiční obor a spojitost f v závislosti na p, q.

8. V kterých bodech má derivaci funkce (a) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ (b) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{k^2+x^2}$

9. * Dokažte, že $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou f'' na $(0, 2\pi)$.

Výsledky a návody. **1.** (a) $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0,1\rangle$, (b) $f_n \to 0$ na $\langle 0,1\rangle$, stejnoměrně na $\langle 0, 1-\varepsilon\rangle$ pro $\varepsilon \in (0,1)$, na žádném $\langle 1-\varepsilon, 1\rangle$ konvergence není stejnoměrná. (c) $f_n \to 0$ na $\mathbf{R}$, stejnoměrně na (k,∞) pro každé $k \in \mathbf{R}$, na žádném $(-\infty, k)$ konvergence není stejnoměrná. (d) $f_n \rightrightarrows x$ na $\langle 0,1\rangle$ (dokonce na $\langle 0,k\rangle$ pro $k \in (0,\infty)$, ale ne na okolí $+\infty$. (e) $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x \in \langle 0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$, stejnoměrně na $\langle 0, 1-\varepsilon\rangle$ a $\langle 1+\varepsilon, +\infty)$ pro každé $\varepsilon > 0$, nestejnoměrně na okolí 1 (ani na jednostranných okolích). (f) $f_n \to 0$ na $\mathbf{R}$, stejnoměrně na $\langle \varepsilon, \infty\rangle$ pro $\varepsilon > 0$, nestejnoměrně na $\langle 0, \varepsilon\rangle$. (g) $f_n \rightrightarrows |x|$ na $\mathbf{R}$ (h) $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbf{R}$ (i) $f_n \to 0$ na $\mathbf{R}$, stejnoměrně na omezených intervalech, nestejnoměrně na okolích $\pm\infty$. (j) $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x > 0 \end{cases}$, stejnoměrně na $\langle \varepsilon, \infty\rangle$, $\varepsilon > 0$, nikoli na $\langle 0, \varepsilon\rangle$. **2.** (a) Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ (totéž platí pro řadu absolutních hodnot, lze použít Weierstrassovo kritérium). (b) Konverguje bodově na $\mathbf{R}$ (absolutně). Konvergence je stejnoměrná na omezených intervalech (Weierstrassovo kritérium), není omezená na okolích $+\infty$ a $-\infty$ (nutná podmínka). (c) Konverguje bodově na množině $M = \{x \in \mathbf{R}; -x \notin \mathbf{N}\}$ (neabsolutně), v ostatních bodech nemá smysl. Konvergence je stejnoměrná na $(K,+\infty) \cap M$ pro každé $K \in \mathbf{R}$ (Leibnizovo kritérium), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podmínka). (d) Konverguje bodově na množině $M = \{x \in \mathbf{R}; x \neq -2^k \text{ pro } k \in \mathbf{N}\}$ (absolutně), v ostatních bodech nemá smysl. Konvergence je stejnoměrná na $(K,+\infty) \cap M$ pro každé $K \in \mathbf{R}$ (Weierstrassovo kritérium), není stejnoměrná na $(-\infty, K) \cap M$ (nutná podmínka). (e) Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ (totéž platí pro řadu absolutních hodnot, lze použít Weierstrassovo kritérium). (f) Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ (neabsolutně, Leibnizovo kritérium). (g) Konverguje bodově na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (absolutně). Konvergence je stejnoměrná na $\mathbf{R} \setminus \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ pro $\varepsilon > 0$ (Weierstrassovo kritérium), není stejnoměrná na $(-\varepsilon, 0)$ ani na $(0, \varepsilon)$ (nutná podmínka). **Poznámka:** V dalších příkladech se používá i Dirichletovo a Abelovo kritérium a odhady $|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \leq \frac{1}{2|\sin \frac{x}{2}|}$ a $|\sum_{k=1}^{n} \cos kx| \leq \frac{1}{2|\sin \frac{x}{2}|}$ pro $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). (h) Konverguje bodově na $\mathbf{R}$ (pro $x = k\pi$ je to zřejmé, pro ostatní to plyne z Dirichletova kritéria). Konvergence je stejnoměrná na intervalech $(2k\pi + \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ (Dirichletovo kritérium), není stejnoměrná na $(2k\pi, 2k\pi + \varepsilon)$ ani na $(2k\pi - \varepsilon, 2k\pi)$ pro $\varepsilon > 0$ (Bolzano-Cauchyova podmínka). (i) Konverguje bodově na $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$ (Dirichletovo kritérium, divergence v bodech $2k\pi$ je důsledkem divergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$). Konvergence je stejnoměrná na intervalech $(2k\pi + \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ (Dirichletovo kritérium), není stejnoměrná na $(2k\pi, 2k\pi + \varepsilon)$ ani na $(2k\pi - \varepsilon, 2k\pi)$ pro $\varepsilon > 0$ (věta o záměně limit). (j) Konverguje stejnoměrně na $(-1, +\infty)$ (Dirichletovo kritérium), pro $x \leq -1$ nemá smysl. (k) Konverguje bodově na $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$ (Dirichletovo a Abelovo kritérium, divergence v bodech $2k\pi$ je důsledkem divergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$). Konvergence je stejnoměrná na intervalech $(2k\pi + \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ (Dirichletovo a Abelovo kritérium), není stejnoměrná na $(2k\pi, 2k\pi + \varepsilon)$ ani na $(2k\pi - \varepsilon, 2k\pi)$ pro $\varepsilon > 0$ (věta o záměně limit). **3.** (a) Limita je $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2} \log 2$ (řada konverguje stejnoměrně na $\langle 0, +\infty)$ podle Abelova kritéria). (b) Limita je 1 (lze spočítat elementárně, nelze přehodit limitu a sumu, řada nekonverguje stejnoměrně na $(1 - \varepsilon, 1)$). (c) Limita je 1 (řada konverguje stejnoměrně například na $(-1, +\infty)$). **4.** (a) $f_n \to 0$ na $\mathbf{R}$, konvergence není stejnoměrná na $(0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$. (b) $f_n \to 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$, konvergence není stejnoměrná na $(0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$. (c) $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0, 1)$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$. **5.** Dokažte pomocí Weierstrassova kritéria, že řada n-tých derivací konverguje lokálně stejnoměrně na $(1, +\infty)$ pro všechna n. **6.** Definiční obor je buď $\emptyset$, nebo interval $(\alpha, +\infty)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbf{R}$, nebo interval $\langle \alpha, +\infty)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbf{R}$, nebo $\mathbf{R}$. Funkce je spojitá na svém definičním oboru. Pro $x \in (\alpha, +\infty)$ (je-li definiční obor $(\alpha, +\infty)$ nebo $\langle \alpha, +\infty)$) nebo pro $x \in \mathbf{R}$ (je-li definiční obor $\mathbf{R}$) má funkce $\zeta_{\mathbf{a}}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ vlastní n-tou derivaci $(\zeta_{\mathbf{a}})^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_k \log^n k}{k^x}$. Je-li definiční obor $\langle \alpha, +\infty)$, pak n-tá derivace zprava v bodě α je dána týmž vzorcem, pokud ovšem řada ve vzorci konverguje (což může a nemusí být pravda). Použije se Weierstrassovo kritérium (a věty o záměně limit a derivací atp.). Pro obecný případ platí stejné závěry, jen se použije Abelovo kritérium místo Weierstrassova. **7.** (i) Ukažte, že řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$. (ii) Ukažte, že řada konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$. (iii) Je-li $\max(p, q) \leq 1$, je $D_f = \{0\}$, je-li $\max(p, q) > 1$, je $D_f = \mathbf{R}$. Pro $\max(p, q) > 1$ je f spojitá na $\mathbf{R}$. Je-li navíc $p + q > 2$ nebo $p > q$, je f spojitá na $\mathbf{R}$; je-li $p + q \leq 2$ a $p < q$, není f spojitá v 0 (ani zleva ani zprava). (Případ $p + q \leq 2$ a $p = q$ nemůže nastat, je-li $\max(p, q) > 1$.) **8.** (a) Ve všech bodech definičního oboru, kterým je množina $\{x \in \mathbf{R}; -x \notin \mathbf{N}\}$. (b) $D_f = \mathbf{R}$, derivace existuje (vlastní) v bodech $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. V 0 derivace neexistuje, protože $f'_+(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ a $f'_-(0) = -f'_+(0)$. **9.** Pro první derivaci použijte Weierstrassovo kritérium, pro druhou Dirichletovo kritérium (viz příklad 8).

V. Mocninné řady

Sečtěte mocninné řady tam, kde konvergují:

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ **2.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}$ **3.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ **4.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^k$ **6.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k$

Sečtěte následující řady

9. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ **10.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+k-2}$ **11.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$ **12.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{7k+5}$ **13.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

Výsledky a návody. **1.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ na $\mathbf{R}$. **2.** $\frac{1}{2}(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \cos x)$ na $\mathbf{R}$. **3.** $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ na $(-1,1)$. **4.** $\operatorname{arctg} x$ na $\langle -1,1\rangle$. **5.** $\frac{x}{(1-x)^2}$ na $(-1,1)$. **6.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ na $(-1,1)$. **7.** Součet je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x) + 1 & x \in \langle -1,0)\cup(0,1), \\ 1 & x=1. \end{cases}$$

8. $\frac{2x}{(1-x)^3}$ na $(-1,1)$. **9.** $\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (Abelova věta, připište x^{3k+1}); **10.** $\frac{2}{3}\log 2 - \frac{5}{8}$ (Abelova věta, připište x^{k+2}) **11.** 8 (místo $\frac{1}{2^k}$ pište x^k, sečtěte řadu a dosaďte $x = \frac{1}{2}$) **12.** $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^7}\,\mathrm{d}x$, lze spočítat: rozklad jmenovatele je $(x+1)(x^2-2x\cos\frac{\pi}{7}+1)(x^2-2x\cos\frac{3}{7}\pi+1)(x^2-2x\cos\frac{5}{7}\pi+1)$ (Abelova věta, připište x^{7k+5}); **13.** $\frac{3}{128}$ (místo $\frac{(-1)^k}{3^k}$ pište x^k, sečtěte řadu a dosaďte $x = -\frac{1}{3}$)

VI. Fourierovy řady

1. Rozviňte následující funkce ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$ a určete součet všude, kde řada konverguje. (a) $\sin^2 x$, (b) $\cos^3 x$, (c) $\cos^{2m} x$, (d) $\frac{\sin mx}{\sin x}$, (e) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha^m \frac{\sin mx}{\sin x}$, kde $|\alpha|<1$, (f) $\frac{1}{\sin x}$.

2. Pro následující funkce najděte trigonometrickou řadu, jejímž jsou součtem, a dosazením vhodného x sečtěte uvedenou číselnou řadu. (a) x^2 na $(-\pi,\pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; (b) x na $(-\pi,\pi)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$; (c) $\sin ax$ na $(-\pi,\pi)$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}-a} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}+a}\right)$; (d) x^2 na $(0,2\pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; (e) $x^2 - x$ na $(-\pi,\pi)$; (f) $x^2 + \sin^4 x$ na $(0,2\pi)$.

3. (a) Napište funkci $f(x) = x$ na $(0,\pi)$ jako součet cosinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech? (b) Napište funkci $f(x) = x^2$ na $(-\pi,0)$ jako součet sinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech? (c) Napište funkci $f(x) = \sin x$ na $(0,\pi)$ jako součet cosinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech?

*__4.__ Funkci $f(x) = x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$ vyjádřete jako součet trigonometrické řady obsahující jen členy tvaru (a) $c\sin kx$, $k\in\mathbb{N}$ liché, (b) $c\cos kx$, $k\in\mathbb{N}$ liché, (c) $c\cos kx$, $k\in\mathbb{N}$ sudé, (d) $c\sin kx$, $k\in\mathbb{N}$ sudé. Jak vypadají součty těchto řad?

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. b) $\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. c) $\frac{1}{2^{2m}}\cdot\binom{2m}{m}+\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\binom{2m}{m-n}\cos 2nx$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. d) Pro $m=2k$: $\sum\limits_{n=1}^{k}2\cos(2n-1)x$; pro $m=2k+1$: $1+\sum\limits_{n=1}^{k}2\cos 2nx$; konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. e) $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}\sin nx$, konverguje všude k f. f) Tato funkce nemá konečný Riemannův integrál na $[0,2\pi]$, nemá FŘ. **2.** a) FŘ: $\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx$; součet: $\frac{\pi^2}{12}$ – dosadit $x=0$. b) FŘ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx$; součet: $\frac{\pi}{4}$ – dosadit $x=\frac{\pi}{2}$. c) FŘ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-a^2)}\cdot\sin\pi a\cdot\sin nx$; součet: $\frac{\pi}{\cos\pi a}$ – dosadit $x=\frac{\pi}{2}$. d) FŘ: $\frac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$; součet: $\frac{\pi^2}{6}$ – dosadit $x=0$. e) Odvoďte z výsledků a) a b) pomocí linearity integrálu. f) Odvoďte z výsledku c) pomocí linearity integrálu a vyjádření $\sin^4 x$ jako trigonometrický polynom. **3.** a) FŘ: $\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$, součet je $|x|$ na $[-\pi,\pi]$; b) FŘ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot(-1)^n\cdot\frac{\pi}{n}+\frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\right)\sin nx$, součet je $-x|x|$ na $(-\pi,\pi)$, 0 v bodě π; c) FŘ: $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$, součet je $|\sin x|$ na $\mathbb{R}$. **4.** a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^k}{\pi\cdot(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$, součet je $f^*(x)=\begin{cases}-\pi-x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2}]\\ x & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ \pi-x & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$, a 2π-periodicky. b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^k}{2k+1}-\frac{4}{\pi\cdot(2k+1)^2}\right)\cdot\cos(2k+1)x$, součet je $f^*(x)=\begin{cases}-\pi-x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2})\\ |x| & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ x+\pi & x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\\ 0 & x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$, a 2π-periodicky. c) $\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi\cdot k^2}\cos 2kx$, součet je $f^*(x)=\begin{cases}\pi+x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2}]\\ |x| & x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ \pi-x & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$, a 2π-periodicky. d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^k}{k}\sin 2kx$, součet je $f^*(x)=\begin{cases}\pi+x & x\in[-\pi,\frac{\pi}{2})\\ x & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ x-\pi & x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\\ 0 & x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$, a 2π-periodicky.