I. Opakování – nerovnice, rovnice, logika atp.

1. Řešte nerovnice v **R**: a) $||x-2|+1| \le 5$, b) $|x+1|+|x-2| \le 4$, c) $|x^2-4x+3| \le |x^2-4|$, d) $\frac{x-1}{x+2} < \frac{x}{x+1}+1$, e) $\sqrt{x^2+2x-3} \ge \sqrt{x^2+3x-4}$, f) $\cos x \le \sin x$, g) $\cos^2 x > \sin^2 x$, h) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x+3\right) \ge 0$, i) $\frac{x-2}{2x-8} \ge 1$, j) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$.

2. Načrtněte množinu řešení nerovnic a) $xy \ge 1$, $y \le \sin x$; b) $(x^2-y^2)\sin x \ge 0$.

3. Řešte nerovnice v závislosti na parametrech:
a) $1 \le |ax+1| < 2$, $a \in \mathbb{R}$; b) $ax^2+bx+c \ge 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

4. Pro která $x \in \mathbb{R}$ neplatí nerovnost $|1+x\sqrt{a}| \le 2ax^2$ pro žádné $a \in \mathbb{R}$?

5. Určete množinu $\{a \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| \le 1 \Rightarrow x^2-ax > 5)\}$.

6. Nakreslete graf funkce: $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

7. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí $\cos x$ a $\sin x$.

8. Řešte rovnice: (a) $\sin 2x = \sin x$, (b) $2\sin x + \cos x = 1$, (c) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$.

9. Dokažte pro a, $b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \le |a|+|b|$, $\qquad ||a|-|b|| \le |a-b|$.

10. Dokažte matematickou indukcí: a) $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$; b) 10^n-4 je dělitelné 6 pro každé $n \in \mathbb{N}$;
c) $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 2\sqrt{n}$; d) $(1+x)^n \ge 1+nx$, $n \in \mathbb{N}, x \ge -1$;
e) $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$, $a_1,\ldots,a_n \ge 0$; f) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;
g) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; h) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{n}{2}x \sin\frac{n+1}{2}x$; i) $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$;
j) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $n>1$; k) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;
l) $\left|\sin\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k$, $x_1,\ldots,x_n \in [0,\pi]$; m) $2^n \ge n^2$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{3\}$.

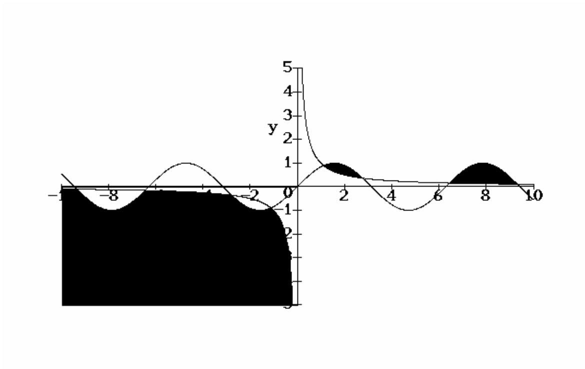
11. Nechť M značí množinu všech mužů a $\check{Z}$ množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy: $S(m,\check{z})$: „Muž m je manželem ženy $\check{z}$.“; $L_1(m,\check{z})$: „Muž m miluje ženu $\check{z}$.“; $L_2(m,\check{z})$: „Žena $\check{z}$ miluje muže m.“. Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S, L_1 a L_2 zapište následující výroky:
a) Každý ženatý muž miluje svou manželku. $\qquad$ b) Každou ženu miluje nějaký muž.
c) Každá žena má nejvýš jednoho manžela.
d) Každý muž má nejvýš jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co c)?)
e) Existuje vdaná žena. $\qquad$ f) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co e)?)
g) Existují nevěrné manželky. (Manželku prohlásíme za nevěrnou, pokud miluje jiného muže než svého manžela.)
Následující výroky přeložte do češtiny.
h) $\exists m \in M \forall \check{z} \in \check{Z}(\neg S(m,\check{z}))$; i) $\exists \check{z} \in \check{Z} \forall m \in M(L_1(m,\check{z}) \Rightarrow \neg L_2(m,\check{z}))$;
j) $\exists \check{z} \in \check{Z} \forall m \in M(L_2(m,\check{z}) \Rightarrow \neg L_1(m,\check{z}))$;
k) $\forall \check{z} \in \check{Z}((\exists m \in M : L_2(m,\check{z})) \Rightarrow (\exists m \in M : L_1(m,\check{z})\ \&\ \neg L_2(m,\check{z}))$.

12. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.
a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}(z > x \Rightarrow y < z)$; b) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ (z > x \Rightarrow y < z)$;
c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}(z > x \Rightarrow y < z)$; d) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}(z < x \Rightarrow y > z)$;
e) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}(x \in (a,a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$;
f) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}(x \in (a,a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$.

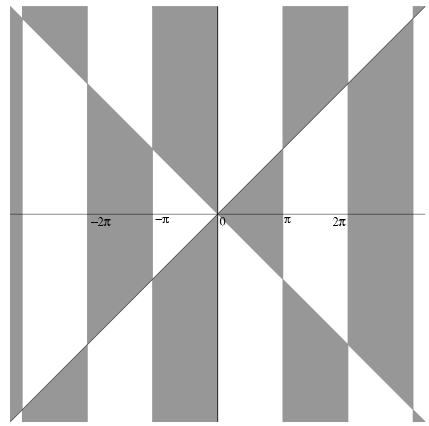
13. Vyjádřete co nejjednodušeji:
a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : |y-7| < 5 \Rightarrow |f(y)-15| < \varepsilon$;
b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 1 \forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |y-x| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{1}{n}$.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) $x \in [-2, 8]$; b)$x \in [-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$; c) $x \in [1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{7}{4}] \cup [1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$; d) $x \in (-\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \cup (-2, -1) \cup (\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$; e) $x \in (-\infty, -4] \cup \{1\}$; f) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi]$; g) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$; h) $x \in [1, 2]$; i) $(4, 6]$; j) $[1, 2]$.

2. a)

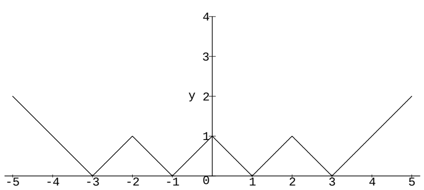


b)



$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ a $|y| \leq |x|$; nebo $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ a $|y| \geq |x|$. **3.** a) Pro $a = 0$ je $x \in \mathbb{R}$, pro $a \neq 0$ je $x \in (-\frac{1}{a} - \frac{2}{|a|}, -\frac{1}{a} - \frac{1}{|a|}] \cup [-\frac{1}{a} + \frac{1}{|a|}, -\frac{1}{a} + \frac{2}{|a|})$. b) $a = b = 0, c \geq 0$ – $x \in \mathbb{R}$; $a = b = 0, c < 0$ – žádné řešení; $a = 0, b > 0$ – $x \in [-\frac{c}{b}, +\infty)$; $a = 0, b < 0$ – $x \in (-\infty, -\frac{c}{b}]$; $a > 0, b^2 - 4ac \leq 0$ – $x \in \mathbb{R}$; $a > 0, b^2 - 4ac > 0$ – $x \in (-\infty, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}] \cup [\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, +\infty)$; $a < 0, b^2 - 4ac < 0$ – žádné řešení; $a < 0, b^2 - 4ac = 0$ – $x = -\frac{b}{2a}$; $a < 0, b^2 - 4ac > 0$ – $x \in [\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}]$. **4.** Pro $x = 0$. **5.** $(-\infty, -4)$.

6.



7. $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$; $\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$. **8.** (a) $x \in \{k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$ pro $k \in \mathbb{Z}$; (b) $x \in \{2k\pi, \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi\}$ pro $k \in \mathbb{Z}$; (c) $x = \frac{4}{3}$. **9.** Proveďte rozbor možností pro znaménka. Druhou nerovnost odvoďte z první. **11.** a) $\forall m \in M\ \forall \check{z} \in \check{Z} : S(m, \check{z}) \Rightarrow L_1(m, \check{z})$; b) $\forall \check{z} \in \check{Z}\ \exists m \in M : L_1(m, \check{z})$; c) $\forall \check{z} \in \check{Z}\ \forall m_1 \in M\ \forall m_2 \in M : S(m_1, \check{z})\ \&\ S(m_2, \check{z}) \Rightarrow m_1 = m_2$; d) $\forall m \in M\ \forall \check{z}_1 \in \check{Z}\ \forall \check{z}_2 \in \check{Z} : S(m, \check{z}_1)\ \&\ S(m, \check{z}_2) \Rightarrow \check{z}_1 = \check{z}_2$ (NE); e) $\exists \check{z} \in \check{Z}\ \exists m \in M : S(m, \check{z})$; f) $\exists m \in M\ \exists \check{z} \in \check{Z} : S(m, \check{z})$ (ANO); g) Existuje nevěrná manželka (aspoň jedna): $\exists \check{z} \in \check{Z}\ \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M (m_1 \neq m_2\ \&\ S(m_1, \check{z})\ \&\ L_2(m_2, \check{z}))$, existují nevěrné manželky (aspoň dvě): $\exists \check{z}_1 \in \check{Z}\ \exists \check{z}_2 \in \check{Z} \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M\ \exists m_3 \in M\ \exists m_4 \in M (\check{z}_1 \neq \check{z}_2\ \& m_1 \neq m_2\ \&\ m_3 \neq m_4\ \&\ S(m_1, \check{z}_1)\ \&\ L_2(m_2, \check{z}_1)\ \&\ S(m_3, \check{z}_2)\ \&\ L_2(m_4, \check{z}_2))$. h) Existuje svobodný muž. i) Existuje žena, která žádnému muži neopětuje lásku. j) Existuje žena, jíž žádný muž neopětuje lásku. k) Každá žena, která někoho miluje, nemiluje některého muže, který miluje ji. **12.** a) Platí, negace $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N} (z > x\ \&\ y \geq z)$; b) Platí, negace $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ (z > x\ \&\ y \geq< z)$; c) Neplatí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N} (z > x\ \&\ y \geq z)$; d) Platí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N} (z < x\ \&\ y \leq z)$; e) Platí, negace $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| \geq 1)$; f) Platí, negace $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| \geq 1)$. **13.** a) $f(y) = 15$ pro všechna $y \in (2, 12)$; b) Funkce f je na konstantní na $\mathbb{R}$.

II. Zobrazení a suprema

1. Nechť $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Nalezněte D_f, H_f, f^{-1}.

2. Nechť $\varphi:[0,\infty)\to[1,\infty)$ je bijekce (tj. zobrazení prosté a na) a $\psi(x)=\sqrt{\varphi^2(x)-1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1}, a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Co je $D_{\psi^{-1}}$?

3. Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z+2\bar{z}$, $g(z)=a(2\bar{z}-z)$. Existuje $a\in\mathbb{C}$, pro které $g=f^{-1}$?

4. Vyšetřete z hlediska monotonie (bez užití derivace) následující funkce a načrtněte jejich graf:
a) $f(x)=\frac{3x+2}{2x-3}$ *c)* $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$
b) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ *d)* $f(x)=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$

5. Zapište co nejjednodušší předpis pro funkce $f\circ f$ a $f\circ f\circ f$, pokud f je funkce z bodů a), b) předchozího příkladu, nebo c) $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Určete vždy definiční obor a obor hodnot.

6. Nechť $f:X\to Y$, $A,B\subset X$. Platí obecně a) $f(A)\cup f(B)=f(A\cup B)$;
b) $f(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$; c) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$; d) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$? Pokud nějaké z uvedených tvrzení neplatí, charakterizujte funkce, pro které platí. Jak je to v případě, že $A,B\subset Y$ a místo f píšeme v a)–d) f^{-1}?

7. Charakterizujte zobrazení $f:M\to L$, pro která platí
a) $(\forall A\subset M)(f^{-1}(f(A))=A)$; b) $(\forall B\subset L)(f(f^{-1}(B))=B)$.

8. Platí výrok $(\exists M\subset\mathbb{R})(\exists! f:M\to\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(x\neq 0\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=g(x))$,
je-li *a)* $g(x)=\sin x+\sin\frac{1}{x}$, *b)* $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, *c)* $g(x)=\frac{x^{16}+1}{x^8}$?
Pokuste se charakterizovat všechny funkce g, pro které uvedený výrok platí.

9. Platí výroky (1) $(\exists M\subset\mathbb{R})(\exists! f:M\to\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(f(x^2-2x)=g(x))$,
(2) $(\exists M\subset\mathbb{R})(\exists! f:M\to\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})(f(x-|x|)=g(x))$,
je-li *a)* $g(x)=\cos(1-x)$, *b)* $g(x)=\sin(1-x)$ *c)* $g(x)=\max(x,0)$,
d) $g(x)=\max(-x,0)$?
Pokuste se charakterizovat všechny funkce g, pro které uvedené výroky platí.

Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

10. $A=\{p/(p+q);\ p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}\}$, **11.** a) $B_1=\{\sin x;\ x\in\langle 0,2\pi\rangle\}$, b) $B_2=\{\sin x;\ x\in(0,2\pi)\}$, c) $B_3=\{\sin x;\ x\in(0,\pi)\}$, **12.** a) $C_1=\{n^2-m^2;\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}\}$,
b) $C_2=\{n^2-m^2;\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}, n>m\}$, c) $C_3=\{n^2-m^2;\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}, n\leq m\}$,
13. a) $D_1=\{2^{-n}+3^{-n};\ n\in\mathbb{N}\}$, $D_2=\{2^{-n}+3^{-n};\ n\in\mathbb{Z}\}$, **14.** $E=\{5^{(-1)^j 3^k};\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\}$.
15. a) $F_1=\{\cos(n+\frac{1}{n})\pi;\ n\in\mathbb{N}\}$, b) $F_2=\{\cos(n+\frac{1}{n})\pi;\ n\in\mathbb{N}\text{ sudé}\}$,
c) $F_3=\{\cos(n+\frac{1}{n})\pi;\ n\in\mathbb{N}\text{ liché}\}$

16. Nechť $A,B\subset\mathbb{R}$ a $S=\sup A$, $s=\inf A$, $T=\sup B$, $t=\inf B$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin? a) $A\cup B$, b) $A\cap B$, *c) $A+B=\{a+b\mid a\in A, b\in B\}$, d) $-A=\{-a\mid a\in A\}$, *e) $A\cdot B=\{a\cdot b\mid a\in A, b\in B\}$, f) $A-B$, g) $A\setminus B$, h) $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Výsledky a návody. **1.** $D_f=[0,16)\cup(16,+\infty)$, $H_f=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$, $f^{-1}(y)=\frac{16y^2}{(y+2)^2}$, $y\in H_f$. **2.** $D_{\psi^{-1}}=H_\psi=[0,\infty)$, $\psi^{-1}(y)=\varphi^{-1}(\sqrt{y^2+1})$. **3.** Ano, $a=\frac{1}{3}$. **4.** a) f klesá na $(-\infty,\frac{3}{2})$ a na $(\frac{3}{2},\infty)$; b) f roste na $(-\infty,-1]$, klesá na $[-1,0)$ a na $(0,1]$, roste na $[1,+\infty)$ (zkoumejte znaménko $f(x_1)-f(x_2)$); c) roste na každém z intervalů $[-\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\frac{1}{3}\pi+2k\pi]$, klesá na každém z intervalů $[\frac{1}{3}\pi+2k\pi,\frac{4}{3}\pi+2k\pi]$ pro $k\in\mathbb{Z}$ (vyjádřete s použitím součtového vzorce); d) roste na každém z intervalů $[-\frac{1}{6}\pi+k\pi,\frac{1}{3}\pi+k\pi]$, klesá na každém z intervalů $[\frac{1}{3}\pi+k\pi,\frac{5}{6}\pi+k\pi]$ pro $k\in\mathbb{Z}$ (vyjádřete pomocí dvojnásobného argumentu a součtového vzorce). **5.** a) $(f\circ f)(x)=x$, $f\circ f\circ f=f$, definiční obor i obor hodnot je ve všech třech případech $\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$; b) $(f\circ f)(x)=\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}$, $(f\circ f\circ f)(x)=\frac{x^8+7x^6+13x^4+7x^2+1}{x(x^2+1)(x^4+3x^2+1)}$, $D_f=D_{f\circ f}=D_{f\circ f\circ f}\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $H_f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, $H_{f\circ f}=(-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[\frac{5}{2},\infty)$, $H_{f\circ f\circ f}=(-\infty,-\frac{29}{10}]\cup[\frac{29}{10},\infty)$; c) $(f\circ f)(x)=\frac{x+1}{x+2}$, $(f\circ f\circ f)(x)=\frac{x+2}{2x+3}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $H_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$, $H_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$, $D_{f\circ f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-\frac{3}{2},-1\}$, $H_{f\circ f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0,\frac{1}{2},1\}$. **6.** Vždy platí a),c); tvrzení b),d) platí právě když f je prosté zobrazení. Pro f^{-1} platí vše. **7.** a) Prostá zobrazení; b) zobrazení na. **8.** a) Ano, b) ne, c) ano. Jsou to ty funkce, pro něž platí $g(x)=g(\frac{1}{x})$ pro každé $x\neq 0$. **9.** (1) a) Ano, b),c),d) ne. Jsou to ty funkce, pro něž platí $g(x) = g(2-x)$ pro všechna x. (2) a),b),c) Ne, d) ano. Jsou to ty funkce, které jsou konstantní na $[0,+\infty)$. **10.** $\sup A = 1$, $\inf A = 0$, maximum a minimum neexistuje. **11.** a),b) $\max B_1 = \max B_2 = 1$, $\min B_1 = \min B_2 = -1$; c) $\max B_3 = 1$, $\inf B_3 = 0$, minimum neexistuje. **12.** a) C_1 není shora ani zdola omezená; b) C_2 není shora omezená, $\min C_2 = 3$; c) C_3 není zdola omezená, $\max C_3 = 0$. **13.** a) $\max D_1 = \frac{5}{6}$, $\inf D_1 = 0$, minimum neexistuje; b) D_2 není shora omezená, $\inf D_2 = 0$, minimum neexistuje. **14.** E není shora omezená, $\inf E = 0$, minimum neexistuje. **15.** a) $\max F_1 = 1$, $\inf F_1 = -1$, minimum neexistuje; b) $\sup F_2 = 1$, $\min F_1 = 0$, maximum neexistuje; c) $\max F_3 = 1$, $\inf F_3 = -1$, minimum neexistuje. **16.** a) $\sup(A\cup B) = \max\{S,T\}$, $\inf(A\cup B) = \min\{s,t\}$. b) Pokud $A\cap B \neq \emptyset$, pak $\max\{s,t\} \le \inf(A\cap B) \le \sup(A\cap B) \le \min\{S,T\}$ (a víc říci nelze). c) $\sup(A+B) = S+T$, $\inf(A+B) = s+t$. d) $\sup(-A) = -s$, $\inf(-A) = -S$. e) $\sup(A\cdot B) = \max\{S\cdot T, s\cdot t, s\cdot T, S\cdot t\}$, $\inf(A\cdot B) = \min\{S\cdot T, s\cdot t, s\cdot T, S\cdot t\}$. f) $\sup(A-B) = S-t$, $\inf(A-B) = s-T$. g) Pokud $A\setminus B \neq \emptyset$, pak $s \le \inf(A\setminus B) \le \sup(A\setminus B) \le S$ (a víc říci nelze). h) Pokud $A\triangle B \neq \emptyset$, pak $\min\{s,t\} \le \inf(A\cap B) \le \sup(A\cap B) \le \max\{S,T\}$ (a víc říci nelze).

III. Spočtěte následující limity posloupností

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right)$ **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$ **10.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$ **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a\ge 0)$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ **14.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **15.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$ **16.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$, $(A,B,C>0)$ **18.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}[kx]}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$ **19.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ **21.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ **22.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ ***24.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2-a_n}$

***25.** Pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$? Totéž pro $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$ **27.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7}+\sqrt[3]{n^7}}-\sqrt[3]{\sqrt{n^7}-\sqrt[3]{n^7}}\right)$ **28.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

29. Spočtěte v závislosti na $k,l\in\mathbb{N}$ a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$.

30. Dokažte, že součin $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

***31.** Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i} = 0$, pokud $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0$.

Výsledky a návody. **1.** 0 **2.** 2 **3.** 2 **4.** 0 (rozšiřte vhodným výrazem) **5.** 0 **6.** Nemá limitu. **7.** 0 **8.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{1}{2}$ **10.** $\frac{1}{3}$ **11.** $\frac{1}{4}$ **12.** 1 pro $a>0$, 0 pro $a=0$ (pro $a>0$ pište $\sqrt[n]{a}=1+\delta_n$ a ukažte, že $\delta_n\to 0$) **13.** 1 (pište $\sqrt[n]{n}=1+\delta_n$ a ukažtem že $\delta_n\to 0$) **14.** 1 **15.** 0 **16.** 0 **17.** $\max\{A,B,C\}$ **18.** $\frac{x}{2}$ **19.** $+\infty$ **20.** 1 **21.** 2 **22.** 0 **23.** 2 (ukažte, že posloupnost a_n je neklesající a omezená, a tudíž má limitu, a pak odvoďte, že tato limita musí být 2) **24.** 1 (ukažte, že posloupnost lichých členů i posloupnost sudých členů jsou monotónní a omezené, a že mají tutéž limitu 1) **25.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$ existuje jen pro $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$ existuje jen pro $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ (využijte toho, že pokud $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$ existuje, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2)x-\sin nx=0$, a pak ještě podobně pro $\cos nx$) **26.** 0 (vhodně rozšiřte a jmenovatele odhadněte). **27.** $\frac{2}{3}$ **28.** $\frac{1}{2}$ (vyjádřete jednoduše $\prod_{n=1}^{k}(1-\frac{1}{(n+1)^2})$ a spočtěte limitu této posloupnosti) **29.** a) 1, pokud $k>l$; -1, pokud $k<l$; 0, pokud $k=l$. b) 1, pokud $k>l$; $(-1)^{l+1}$, pokud $k<l$; $-\infty$, pokud $k=l$ je sudé; -1, pokud $k=l$ je liché. **30.** Použijte větu o limitě monotónní posloupnosti. **31.** Dokazujte matematickou indukcí v závislosti na k. Pro $k=2$ proveďte vhodné rozšíření.

IV. Zjistěte, zda následujících řady konvergují absolutně, konvergují neabsolutně či divergují (v závislosti na parametru)

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k$ **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}, \quad x \in \mathbb{R}$ **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\ln x}, \quad x \in \mathbb{R}$ **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$ **10.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k+3^k}$

11. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ **12.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$ **13.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$

14. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ **15.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}, \quad x \in \mathbb{R}$ **16.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^4 x^n,\ x \in \mathbb{R}$ **17.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k},\ x \in \mathbb{R}$

18. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2},\ x \in \mathbb{R}$ **19.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},\ x \in \mathbb{R}$ **20.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi) \left(\sqrt{k+11}-\sqrt{k+2}\right)$

21. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$ **22.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}-1\right)$ **23.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$ **24.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$

25. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ **26.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) \frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$

Výsledky a návody. **1.** Konverguje absolutně. **2.** Konverguje absolutně. **3.** Konverguje absolutně. **4.** Diverguje. **5.** Konverguje absolutně. **6.** Diverguje. **7.** Konverguje absolutně pro $x \neq \pm 1$, diverguje pro $x = \pm 1$. **8.** Pro $0 < x < \frac{1}{e}$ konverguje absolutně, jinak diverguje (pro $x \leq 0$ nemá smysl). **9.** Konverguje absolutně. **10.** Konverguje absolutně. **11.** Pro $\alpha > \frac{1}{2}$ konverguje absolutně, jinak diverguje. **12.** Diverguje. **13.** Konverguje neabsolutně. **14.** Konverguje absolutně. **15.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, jinak diverguje. **16.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| \geq 1$. **17.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, pro $x = 1$ konverguje neabsolutně, pro $x = -1$ diverguje. **18.** Konverguje absolutně pro $|x| \leq 1$, diverguje pro $|x| > 1$. **19.** Konverguje absolutně pro $|x| < 1$, diverguje pro $|x| > 1$, konverguje neabsolutně pro $|x| = 1$. **20.** Konverguje (neabsolutně). **21.** Konverguje neabsolutně. **22.** Konverguje. **23.** Konverguje neabsolutně. **24.** Konverguje neabsolutně. **25.** Diverguje. **26.** Diverguje.

V. Spočtěte limity nebo dokažte, že neexistují

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ **3.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **4.** $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $(m,n\in\mathbb{N})$ **6.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, $(n\in\mathbb{N})$ **7.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, $(n\in\mathbb{N})$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $(m,n\in\mathbb{N},a,b\in\mathbb{R})$ **9.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, $(m,n\in\mathbb{N})$ **10.** $\lim\limits_{x\to1}([x]-x)$

11. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$ **12.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$ **13.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ **14.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ **15.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$ **17.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ **18.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ **19.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

20. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}$ **21.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log\cos x}{x^2}$ **22.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(\cos\alpha x)}{\log(\cos\beta x)}$ **23.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ **25.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2x}$ **26.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$ **27.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{\log(x^{10}+x+1)}$

28. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$ **29.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$ **30.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ **31.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$

32. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$ **33.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ **34.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$

35. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}\cdot x^k$, $(k\in\mathbb{Z})$ **36.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$, **37.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

38. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby platilo $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$. **39.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$

40. $\lim\limits_{x\to1-}\frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$ **41.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi\cdot2^x)}{\log\cos(\pi\cdot4^x)}$ **42.** $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$ **43.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos x)^x-\sqrt{1+\sin^3x}}{x^3}$

44. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x-1}+\sqrt[3]{\cos\pi x}}{\log^2x}$ **45.** $\lim\limits_{x\to0+}\left(e^x-1\right)^{\frac{(\operatorname{tg}x)^2}{x^\alpha}}$

- -

Výsledky a návody. **1.** 6 **2.** $-\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{3}{2}$ **4.** $\frac{112}{27}$ **5.** $\frac{1}{2}mn(n-m)$ **6.** $\frac{1}{2}n(n+1)$ **7.** $\frac{1}{n}$ **8.** $\frac{an-bm}{mn}$ **9.** $\frac{m}{n}$ **10.** Limita neexistuje (zleva -1, zprava 0). **11.** 1 **12.** -3 **13.** $\frac{1}{2}$ **14.** 1 **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **16.** 2 **17.** $\frac{\alpha}{\beta}$, pokud $\beta\neq0$. **18.** -1 **19.** $\frac{4}{3}$ **20.** $-\frac{1}{12}$ **21.** $-\frac{1}{2}$ **22.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, pokud $\beta\neq0$ **23.** 0 **24.** e^3 **25.** e **26.** 1 **27.** $\frac{1}{5}$ **28.** 0 **29.** $\frac{3}{2}$ **30.** $\frac{1}{e}$ **31.** limita neexistuje. **32.** $+\infty$ **33.** $\frac{2}{3}$ **34.** $3\log2$ **35.** 0 pro $k>1$, $\frac{1}{\pi}$ pro $k=1$, $+\infty$ pro $k<1$ liché, neexistuje pro $k<1$ sudé. **36.** 0 **37.** $\frac{1}{2}$ **38.** $a=-1,b=\frac{1}{2}$ **39.** 1 **40.** 0 pro $\alpha<\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ pro $\alpha=\frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $\alpha>\frac{1}{2}$ **41.** $-\frac{1}{8}$ **42.** 2 **43.** -1 **44.** $1+\frac{3}{2}\pi^2$ **45.** 1 pro $\alpha<2$, 0 pro $\alpha\geq2$

==

VI. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x)=$

1. $(x^2+51x+119)^{87}$ **2.** $(x+15)^3(x-17)^{10}x^9$ **3.** $\frac{e^{x^2+1}\cdot\cos x}{(x+1)^2\cdot\log(x^2+1)}$ **4.** $\log(x^2+x+1)$

5. $\sin\left(\cos\left((x^3+17x^2-56x+1)^{18}\right)\right)$ **6.** x^x **7.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **8.** $(\sin x)^{\cos x}$ **9.** $\arcsin(\sin x)$

10. $\log\arccos x$ **11.** $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ **12.** $\operatorname{arctg}e^x-\log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

13. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$ **14.** $(\operatorname{arctg}x)^{\arcsin x}$ **15.** $f(x)=e^{\frac{1}{\log|x|}}$

16. Spočtěte limity a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$, $(a>0)$, b) $\lim\limits_{x\to0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Výsledky a návody. **1.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 87(x^2+51x+119)^{86}\cdot(2x+51)$. **2.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x+15)^2(x-17)^{10}x^9 + 10(x+15)^3(x-17)^9x^9 + 9(x+15)^3(x-17)^{10}x^8$. **3.** f je definována a spojitá na $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$, $f'(x) = \frac{\left((2x+1)e^{x^2+1}\cdot\cos x - e^{x^2+1}\cdot\sin x\right)\cdot(x+1)\cdot\log(x^2+1) - e^{x^2+1}\cdot\cos x\cdot\left(2\cdot\log(x^2+1)+\frac{2x(x+1)}{x^2+1}\right)}{(x+1)^3\cdot\log^2(x^2+1)}$. **4.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ **5.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = -18\cos\left(\cos\left((x^3+17x^2-56x+1)^{18}\right)\right)\cdot\sin\left((x^3+17x^2-56x+1)^{18}\right)\cdot(x^3+17x^2-56x+1)^{17}\cdot(3x^2+34x-56)$. **6.** f je definována a spojitá na $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 1$, lze tedy spojitě dodefinovat na $[0,\infty)$. $f'(x) = x^x(\log x + 1)$ pro $x > 0$. Po dodefinování platí $f'_+(0) = -\infty$. **7.** f je definována a spojitá na $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = +\infty$, nelze spojitě rozšířit. $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}+2}\cdot(\log x - 1)$ pro $x > 0$. **8.** f je definována a spojitá na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$. $\lim\limits_{x\to2k\pi+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi-} f(x) = +\infty$, lze tedy spojitě rozšířit na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\langle 2k\pi,(2k+1)\pi)$. $f'(x) = (\sin x)^{\cos x}\cdot(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log\sin x)$ pro $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$. Po dodefinování je $f'_+(2k\pi) = 1$. **9.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $f'(x) = -1$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi)$, $f'_-(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = f'_+(-\frac{\pi}{2}+2k\pi) = 1$, $f'_+(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = f'_-(-\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1$ $(k\in\mathbb{Z})$. **10.** f je definována a spojitá na $\langle -1,1)$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = -\frac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1,1)$, $f'_+(-1) = -\infty$. **11.** f je definována a spojitá na $\langle 0,+\infty)$. $f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ pro $x > 0$, $f'_+(0) = 0$. **12.** f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ pro $x\in\mathbb{R}$. **13.** f je definována a spojitá na $(1,\infty)$, $\lim\limits_{x\to1+} f(x) = 0$, lze tedy spojitě rozšířit na $\langle 1,\infty)$. $f'(x) = \frac{x\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ pro $x > 1$, po dodefinování je $f'_+(-1) = +\infty$. **14.** f je definována a spojitá na $(0,1\rangle$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 1$, lze tedy spojitě dodefinovat na $\langle 0,1\rangle$. $f'(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}\cdot(\frac{\log\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x})$ pro $x \in (0,1)$, $f'_-(1) = +\infty$, po dodefinování je $f'_+(0) = -\infty$. **15.** f je definována a spojitá na $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to1+} = \lim\limits_{x\to-1-} f(x) = +\infty$. Funkce f lze tedy rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tak, že bude spojitá všude kromě bodů ±1, a navíc bude spojitá v bodě 1 zleva a v bodě -1 zprava. $f'(x) = -e^{\frac{1}{\log|x|}}\cdot\frac{1}{x\log^2|x|}$ pro $x \neq 0,\pm1$. Po dodefinování je $f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_-(1) = f'_+(-1) = 0$. **16.** a) $a^a(\log a + 1)$, b) e^2.

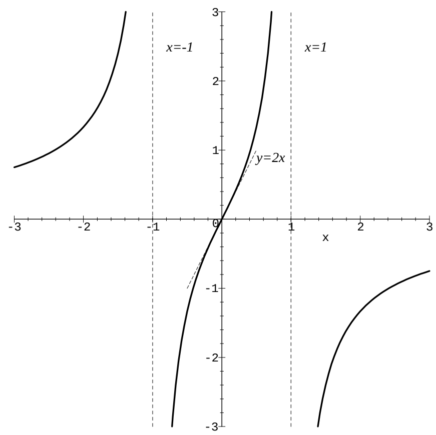
==

VII. Příklady na průběh funkcí

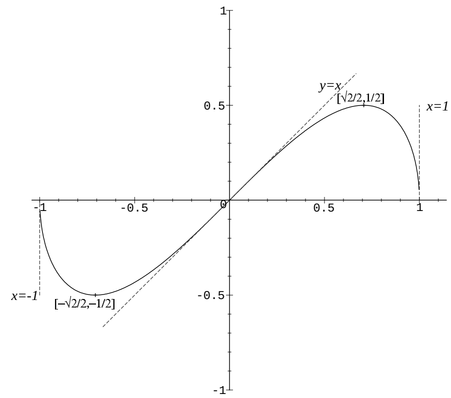
1. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ **2.** $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ **3.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ **4.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$ **6.** $f(x) = \frac{x^4+8}{x^3+1}$ **7.** $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$ **8.** $f(x) = \frac{|x+1|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$ **10.** $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ **11.** $f(x) = |\sin x| + \cos 2x$
12. $f(x) = \exp(-x^2+3x-7)$ **13.** $f(x) = \arcsin(\cos^2 x)$ **14.** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$
15. $f(x) = \arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **16.** $f(x) = \arccos\frac{2x}{1+x^2}$ **17.** * $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ **18.** * $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$
19. * $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1}}$ **20.** * $f(x) = \arcsin(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2})$

Výsledky a návody.

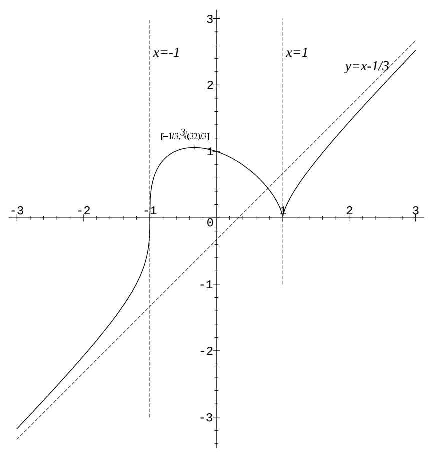
1.



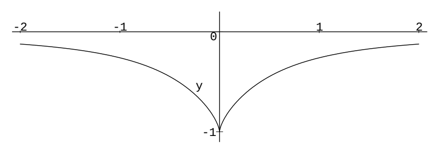
2.



3.



5.



7.