I. Zjistěte, zda $(V, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$, jestliže

1. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, V je množina všech reálných funkcí definovaných na $\mathbf{R}$,
a) $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda \odot g)(x) = \lambda g(x)$ pro $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$.
b) $(f \oplus g)(x) = f(x)g(x)$, $(\lambda \odot g)(x) = \lambda g(x)$ pro $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$.
2. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $V = (0, +\infty)$, $u \oplus v = uv$, $\lambda \odot v = \lambda v$. **3.** $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{C}$, $u \oplus v = u + v$, $\lambda \odot v = \lambda v$.
4. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{R}$, $u \oplus v = u + v$, $\lambda \odot v = |\lambda| v$.
5. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $u \oplus v = u + v$, $\lambda \odot [u_1, u_2] = [\lambda^3 u_1, \lambda u_2]$.
6. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^2$, $[u_1, u_2] \oplus [v_1, v_2] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$, a) $\lambda \odot [u_1, u_2] = [\bar{\lambda} u_1, \bar{\lambda} u_2]$; b) $\lambda \odot [u_1, u_2] = [\lambda u_1, \bar{\lambda} u_2]$. **7.** $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{R}^2$, $[u_1, u_2] \oplus [v_1, v_2] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$, $\lambda \odot [u_1, u_2] = [u_1 \operatorname{Re} \lambda - u_2 \operatorname{Im} \lambda, u_2 \operatorname{Re} \lambda + u_1 \operatorname{Im} \lambda]$.

Zjistěte, zda je U vektorovým podprostorem V, jestliže

8. $V = \mathbf{R}^3$; a) $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 0\}$, b) $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x_1 = x_2^2\}$, c) $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x_1 + x_3 = 1\}$. **9.** $V = \mathbf{R}^2$, $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x_1 \geq 0\}$. **10.** $V = \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$; a) $U = \{f \in V \colon f(0) + f(1) = f(1/2)\}$, b) $U = \{f \in V \colon f(0) = (f(1))^2\}$, c) $U = \{f \in V \colon \forall x \in [0,1] \colon |f(x)| \leq 1\}$, d) $U = \{f \in V \colon \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$, e) $U = \{f \in V \colon \int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x = 17\}$, f) $U = \{f \in V \colon \int_0^1 (f(x))^3\,\mathrm{d}x = 0\}$, g) $U = \{f \in V \colon \int_{1/2}^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0\}$.

Výsledky a návody. **1.** a) ANO, b) NE (neplatí např. (iv)). **2.** NE ($\odot$ není operace). **3.** ANO **4.** NE (neplatí (vi)). **5.** NE (neplatí (vi)). **6.** a) ANO, b) ANO. **7.** ANO. **8.** a) ANO, b) NE ($[1,1,0] \in U$, $2 \cdot [1,1,0] \notin U$), c) NE ($[0,0,0] \notin U$). **9.** NE ($[1,0] \in U$, $-[1,0] \notin U$). **10.** a) ANO, b) NE ($1 \in U$, $2 \cdot 1 \notin U$), c) NE ($1 \in U$, $2 \cdot 1 \notin U$), d) ANO, e) NE ($0 \notin U$), f) NE (nechť $f(x) = \frac{1}{2} - x$ a $g(x) = |2x - 1| - \frac{1}{2}$; pak $f, g \in U$, $f + g \notin U$), g) ANO ($U = \{f \in V \colon \forall x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \colon f(x) = 0\}$).

II. Určete dimenzi a nalezněte nějakou bázi vektorového prostoru V, kde

1. $V = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,1], [1,2,2], [10,11,11]\} \subset \mathbf{R}^3$.
2. $V = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,1,2,2], [-1,-2,-2,-2,2], [19,1,1,1,1], [-1,-3,-3,-2,6]\} \subset \mathbf{R}^5$.
3. $V = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{x + 7, x^2 - x - 1, x^2 + 3, x - 5\} \subset C(\langle 0, 1 \rangle)$.
4. $V = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\} \subset C(\langle 0, \pi \rangle)$. **5.** $V = \mathbf{C}^2$ jako vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.
6. $V = M(2 \times 3)$. **7.** $V = \{\mathbb{A} \in M(3 \times 3) \colon \mathbb{A}^T = \mathbb{A}\}$.
8. $V = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{R}^3 \colon x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
9. $V = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbf{R}^4 \colon x_1 + x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$.
10. $V = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbf{R}^4 \colon \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{o}\}$.
11. $V = \{f \in C(\mathbf{R}) \colon f$ má všude pátou derivaci a $f^{(5)} = 0$ na $\mathbf{R}\}$.

Výsledky a návody. **1.** $\dim V = 2$, báze je například $\{[1,1,1], [0,1,1]\}$ (nebo též $\{[1,1,1], [1,2,2]\}$). **2.** $\dim V = 3$, báze je například $\{[1,1,1,2,2], [0,-1,-1,0,4], [0,0,0,37,109]\}$. **3.** $\dim V = 3$, báze je například $\{1, x, x^2\}$. **4.** $\dim V = 4$, množina ze zadání je báze. **5.** $\dim V = 4$, báze je například $\{[1,0], [i,0], [0,1], [0,i]\}$. **6.** $\dim V = 6$, bázi tvoří například šestice matic, které mají na jednom místě 1 a na ostatních 0. **7.** $\dim V = 6$, bázi tvoří například
$\left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} \right\}$. **8.** $\dim V = 2$, báze je například $\{[1,0,1], [0,1,1]\}$. **9.** $\dim V = 1$, báze je například $\{[0,-1,1,1]\}$. **10.** $\dim V = 0$, báze je $\emptyset$ ($V = \{[0,0,0,0]\}$). **11.** $\dim V = 5$, báze je například $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

III. Je $L\colon U \to V$ lineární zobrazení? Pokud ano, jak vypadá $\operatorname{Ker}(L)$ a $\operatorname{Im}(L)$?

1. $U = \mathbf{R}^3$, $V = \mathbf{R}^4$; a) $L(u,v,w) = [u+w, w-v+7u, u, u]$, b) $L(u,v,w) = [u^2, v, 0, 0]$, c) $L(u,v,w) = [0,0,0,0]$, d) $L(u,v,w) = [u, v-1, 4w, u+w]$, e) $L(u,v,w) = [u,v,w,w]$, f) $L(u,v,w) = [u+v, u-v, w, 10u]$.
2. $U = C(\mathbf{R})$, $V = C(\mathbf{R})$; a) $L(f)(x) = f(x+1) - f(x)$, b) $L(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, c) $L(f)(x) = f(x^2)$, d) $L(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $U = C^1(\mathbf{R})$, $V = C(\mathbf{R})$; a) $L(f)(x) = f'(x)$, b) $L(f)(x) = f(x) - f'(x)$, c) $L(f)(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Výsledky a návody. **1.** a) ANO, $\operatorname{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\operatorname{Im}(L) = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,7,1,1],[0,-1,0,0],[1,1,0,0]\}$; b) NE; c) ANO, $\operatorname{Ker}(L) = \mathbf{R}^3$, $\operatorname{Im}(L) = \{[0,0,0,0]\}$; d) NE; e) ANO, $\operatorname{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\operatorname{Im}(L) = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,1]\}$; f) ANO, $\operatorname{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\operatorname{Im}(L) = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,0,10],[1,-1,0,0],[0,0,1,0]\}$. **1.** a) ANO, $\operatorname{Ker}(L)$ tvoří 1-periodické funkce, $\operatorname{Im}(L) = C(\mathbf{R})$ (mírně obtížnější); b) ANO, $\operatorname{Ker}(L) = \{0\}$, $\operatorname{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R})\colon f(0) = 0\}$; c) ANO, $\operatorname{Ker}(L) = \{f \in C(\mathbf{R})\colon f \restriction \langle 0,+\infty) = 0\}$, $\operatorname{Im}(L)$ tvoří sudé funkce; d) ANO, $\operatorname{Ker}(L)$ tvoří 2-periodické funkce splňující navíc $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\operatorname{Im}(L) = C^1(\mathbf{R})$ (obojí mírně obtížnější). **2.** a) ANO, $\operatorname{Ker}(L)$ tvoří konstantní funkce, $\operatorname{Im}(L) = C(\mathbf{R})$; b) ANO, $\operatorname{Ker}(L) = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{e^x\} = \{ae^x\colon a \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{Im}(L) = C(\mathbf{R})$; c) ANO, $\operatorname{Ker}(L)$ tvoří konstantní funkce, $\operatorname{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R})\colon f(0) = 0\}$.

IV. Bilineární formy

1. Zjistěte, zda B je bilineární forma, pokud ano, napište reprezentující matici a rozhodněte, zda B je symetrická. a) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1 + y_2$; b) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = (x_1+y_2)(x_2+y_1)$; c) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1y_2 + x_2y_1$; d) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1^2 + x_2^2$; e) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1x_2 + y_1y_2$; f) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = (x_1 - x_2)(y_1 + 9y_2)$.
2. Zjistěte, zda následující matice jsou pozitivně definitní, negativně definitní atd.
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;
g) $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Výsledky a návody. **1.** a), b), d), e) NE; c) ANO, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, je symetrická; f) ANO, $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$, není symetrická. **2.** a) ID, b) PD, c),d) PSD, ne PD; e) ID, f) ND, g) PD, h) PSD, ne PD, i),j) ID.

V. Najděte vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory pro matice

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} -23 & 21 & 3 & -17 \\ -40 & 35 & 4 & -31 \\ 58 & -50 & -5 & 47 \\ -8 & 6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. (ve formátu: (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů)) **1.** $(1, 1, \{t \cdot [1, 2]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(2, 1, \{t \cdot [1, 1]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **2.** $(6, 1, \{t \cdot [2, 1]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(-5, 1, \{t \cdot [3, -4]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **3.** $(1+i, 1, \{t \cdot [1, i]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(1-i, 1, \{t \cdot [1, -i]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **4.** $(3, 2, \{t \cdot [1, 1]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **5.** $(1, 1, \{t \cdot [1, 1, 1]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(2, 1, \{t \cdot [1, 2, 1]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(3, 1, \{t \cdot [1, 1, 2]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **6.** $(1, 1, \{t \cdot [1, 1, 2]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(3, 2, \{t \cdot [1, 0, 1] + s \cdot [0, 1, 0]\colon [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$. **7.** $(1, 1, \{t \cdot [1, 1, 2]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(3, 2, \{t \cdot [1, 2, 1]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **8.** $(0, 3, \{t \cdot [1, 3, 0] + s \cdot [0, -1, 1]\colon [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$. **9.** $(0, 3, \{t \cdot [1, 1, 2]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **10.** $(1, 3, \{t \cdot [1, 1, 1]\colon t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$. **11.** $(i, 2, \{t \cdot [3, 4, -5 + i, 0] + s \cdot [-7 - i, 0, -8 - 10i, 8]\colon [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$, $(-i, 2, \{t \cdot [3, 4, -5 - i, 0] + s \cdot [-7 + i, 0, -8 + 10i, 8]\colon [s, t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0, 0]\}\})$.

==

VI. Rozvoj funkce v bodě

1. Najděte hlavní část rozvoje k-tého řádu v bodě a pro funkce $f+g$, $f-g$, fg, f/g, g/f (pokud existují), jsou li zadány hlavní části rozvoje funkcí f a g:
a) $k = 1$, $a = 0$, f: x, g: $1 + x$; b) $k = 1$, $a = 1$, f: $1 - 2(x - 1)$, g: $1 + (x - 1)$; c) $k = 2$, $a = 3$, f: $7 + (x - 3) + \frac{1}{2}(x - 3)^2$, g: $6(x - 3)$; d) $k = 3$, $a = -2$, f: $1 + (x + 2)^3$, g: $(x + 2) - \frac{1}{2}(x + 2)^2$;
2. Najděte hlavní část rozvoje k-tého řádu funkce $f \circ g$ v bodě a, je-li zadána hlavní část rozvoje funkce g v bodě a a funkce f v bodě $g(a)$. a) $k = 1$, f, g: $1 + (x - 1)$; b) $k = 1$, f: $2 + (x - 7)$, g: $7 + (x - 1)$; c) $k = 2$, f: $(x - 6) + 3(x - 6)^2$, g: $6 + x + x^2$; d) $k = 3$, f: $(x - 2)$, g: $2 + (x - 3)^2 + (x - 3)^3$;

- -

Výsledky a návody. **1.** a) $f+g$: $1 + 2x$; $f - g$: -1; fg: x; f/g: x. b) $f + g$: $2 - (x - 1)$; $f - g$: $-3(x - 1)$; fg: $1 - (x - 1)$; f/g: $1 - 3(x - 1)$; g/f: $1 + 3(x - 1)$. c) $f + g$: $7 + 7(x - 3)^2 + \frac{1}{2}(x - 3)^2$; $f - g$: $7 - 5(x - 3)^2 + \frac{1}{2}(x - 3)^2$; fg: $42(x - 3) + 6(x - 3)^2$; g/f: $\frac{6}{7}(x - 3) - \frac{6}{49}(x - 3)^2$. d) $f + g$: $1 + (x + 2) - \frac{1}{2}(x + 2)^2 + (x + 2)^3$; $f - g$: $1 - (x + 2) + \frac{1}{2}(x + 2)^2 + (x + 2)^3$; fg: $(x + 2) - \frac{1}{2}(x + 2)^2$; g/f: $(x + 2) - \frac{1}{2}(x + 2)^2$. **2.** a) $1 + (x - 1)$; b) $2 + (x - 1)$; c) $4x^2$; d) $(x - 3)^2 + (x - 3)^3$.

==

VII. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce

1. $\operatorname{tg} x$, $k = 4$. **2.** $\cos(\sin x)$, $k = 5$. **3.** $\sin(\sin x)$, $k = 6$. **4.** $\sin(1 - \cos x)$, $k = 3$. **5.** $\operatorname{arctg} x$, $k \in \mathbf{N}$. **6.** $\arcsin x$, $k \in \mathbf{N}$.

Spočtěte limity

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ **9.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x}\right)$ **11.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a > 0)$ **12.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$ **15.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}\right)$

16. Najděte $n \in \mathbb{N}$, aby limita a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$ byla konečná a různá od 0, a spočtěte tuto limitu.

17. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0$.

18. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - a\sin x - b\operatorname{tg} x}{x^4} = 0$ a spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - a\sin x - b\operatorname{tg} x}{x^5}$.

==

VIII. Taylorův polynom – aplikace Lagrangeova tvaru zbytku

1. Spočtěte e^2 s chybou menší než 10^{-4}. **2.** Spočtěte $\log 1.1$ s chybou menší než 10^{-4}. **3.** Spočtěte $\sqrt{5}$ s chybou menší než 10^{-3}. **4.** Spočtěte $\sqrt[3]{1.01}$ s chybou menší než 10^{-8}. **5.** Kolik členů Taylorova polynomu funkce cos v 0 stačí vzít, aby pro každé $x \in (-0.5, 0.5)$ byla chyba menší než 10^{-3}?

IX. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí v uvedených množinách:

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2; M = \mathbb{R}^2$

2. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}; M = \{(x,y); x > 0; y > 0\}$

3. $z(x,y) = x^2y^3(6 - x - y); M = \{(x,y); x > 0; y > 0\}$

***4.** $z(x,y) = x^2y^3(6 - x - y); M = \mathbb{R}^2$

5. $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $M = \{(x,y,z); x > 0, y > 0, z > 0\}$.

6. $f(x,y,z) = x^4 - y^4 - x^2 - 2xy - y^2, \quad M = \mathbb{R}^2$

7. Dokažte, že funkce $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ nabývá lokálního maxima v nekonečně mnoha bodech, avšak lokálního minima ani v jednom bodě.

===

X. Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0$ **2.** $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$
3. $y(n+2) - 6y(n+1) + 13y(n) = 0$, $y(1) = 0$ **4.** $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0$, $y(1) = 2$, $y(2) = 1$ **5.** $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0$, $y(1) = y(2) = 1$ **6.** $y(n+4) + 6y(n+2) + 9y(n) = 0$
7. $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \cos n$ **8.** $y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n + 2^n$
9. $y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = \sin n + \sin 2n$ **10.** $8y(n+3) + y(n) = 3n + 1/2^n$
11. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2$, $y(1) = 3$, $y(2) = 2$. **12.** $y(n+2) - y(n) = 17$, $y(1) = y(2) = 0$.