I. Zjistěte, zda (X,ρ) je metrický prostor, pokud

1. X je libovolná množina, $\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$. **2.** $X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p$, kde $p \in (0,1)$. **3.** $X = \mathbb{R}^2$, $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$, kde $p \in (0,1)$.

4. X je prostor omezených spojitých funkcí na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ (t.j. $X = \mathcal{C}_b(I)$), $\rho(f,g) = \sup_{x\in I} |f(x) - f(y)|$. Kdy můžeme napsat max místo sup ?

5. $X = \mathcal{C}[0,1]$, a) $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$; b) $\rho(f,g) = |\int_0^1 f(x) - g(x) \mathrm{d}x|$.

6. $X = \{(x_n) \mid \lim x_n = 0\}$, $\rho(x,y) = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ (a dokažte, že maximum existuje).

7. Nechť (X,ρ) je metrický prostor a $f : X \to X$ zobrazení. Definujme $\sigma(x,y) = \rho(f(x),f(y))$. Dokažte, že (X,σ) je metrický prostor.

8. Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ je funkce a $\sigma(x,y) = f(\rho(x,y))$. Za jakých podmínek na f je σ metrika na X? Co když $f(x) = \frac{x}{1+x}$ (nebo $f(x) = \min(1,x)$) ?

9. Řekneme, že ρ je *pseudometrika* na X, pokud pro každé $x,y,z \in X$ platí

$$\rho(x,x) = 0,\ \rho(x,y) = \rho(y,x),\ \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Nechť na množině X máme posloupnost pseudometrik ρ_n, $n \in \mathbb{N}$. Položme

$$\text{a) } \rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(x,y) \quad \text{b) } \rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\rho_n(x,y)}{\rho_n(x,y)+1}$$

$$\text{c) } \rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x,y)}{\rho_n(x,y)+1} \quad \text{d) } \rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x,y)}{\rho_n(x,y)+1}$$

Je ρ pseudometrika? Kdy je to metrika?

Výsledky a návody. **1.** ano **2.** ano **3.** ne **4.** ano **5.** a) ano b) ne **6.** ano **7.** Platí pro f prosté. **8.** Např. $f(0) = 0$, f nerostoucí, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. **9.** a) Je to pseudometrika, je-li to sup definované. b)c)d) Vždy je to pseudometrika. Metrika to je, právě když pro každé $x \neq y$ existuje n takové, že $\rho_n(x,y) \neq 0$.

II. Ještě k metrickým prostorům

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené, zjistěte jejich vnitřek, uzávěr, vnějšek, hranici.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \leq 0\}$; b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$;
c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$; d) $D = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f(\frac{1}{2}) = 2\}$;
e) $E = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f(\frac{1}{2}) \in (0,2)\}$; f) $F = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0\}$

2. Definujme $\mathcal{N} : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem $\mathcal{N}(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Je $\mathcal{N}$ spojité zobrazení?

3. Dokažte, že na každé množině existuje nejsilnější metrika. Popište ji. Existuje na $\mathbb{R}$ nejslabší metrika?

4. Nalezněte v $\mathbb{R}^2$ metriku, která není ekvivalentní s euklidovskou ani s diskrétní metrikou.

5. Platí rovnosti $\overline{U_\delta(a)} = \{x \mid \rho(a,x) \leq \delta\}$ a $\operatorname{int}\{x \mid \rho(a,x) \leq \delta\} = U_\delta(a)$ pro každé $\delta > 0$ a) v každém metrickém prostoru b) v normovaném lineárním prostoru ?

6. Platí následující rovnosti?
(i) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$; (ii) $\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$; (iii) $\operatorname{int} M_1 \cup \operatorname{int} M_2 = \operatorname{int}(M_1 \cup M_2)$;
(iv) $\operatorname{int} M_1 \cap \operatorname{int} M_2 = \operatorname{int}(M_1 \cap M_2)$; (v) $(M')' = M'$;
(vi) $M \subset \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, s = \sup M \Rightarrow s \in \overline{M} (s \in M', s \in \partial M)$.

7. Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou metrické prostory. Najděte metriku na $X \times Y$ takovou, že konvergence v ní je konvergencí „po souřadnicích“. Totéž pro posloupnost metrických prostorů (X_n,ρ_n) a součin $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

8. Co lze říci o konvergenci v metrikách z příkladu I/9.?

Výsledky a návody. **1.** **2.** Využijte linearitu a monotonii Newtonova integrálu. **3.** Diskrétní metrika je nejsilnější. Nejslabší metrika neexistuje – uvažujme $\rho_1(x,y) = |x-y|$ a $\rho_2(x,y) = |f(x)-f(y)|$, kde f je zobrazení, přehazující dva body (např. 0 a 1). Pak neexistuje metrika slabší než obě tyto. **4.** Např. opět přehození dvou bodů. Nebo $\rho((x,y),(x',y')) = |x-x'| + \rho_d(y,y')$, kde ρ_d je diskrétní metrika. **5.** V metrickém prostoru platit nemusí (např. diskrétní prostor a $\delta = 1$), ale v NLP platí. **6.** Platí: (i), (iv), (vi) – případ $\overline{M}$ a ∂M. Neplatí: (ii), (iii), (v), (vi) – případ M'. **7.** Např. $d((x,y),(x'y')) = \rho(x,x') + \sigma(y,y')$. Pro nekonečně mnoho prostorů např. $d((x_n),(y_n)) = \sum \frac{1}{2^n} \min(\rho_n(x_n,y_n),1)$.

III. Zjistěte, zda existují limity, a existují-li, spočtěte je

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ **4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ **7.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ **8.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin xy}{x}$ **10.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Lze následující funkce spojitě rozšířit na celou rovinu ?

11. $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **12.** $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **13.** $\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$ **14.** $\frac{\sin xy}{x}$

IV. Metrické prostory – pokračování

1. Mějme na množině X dvě metriky ρ a σ, které určují stejný pojem hranice množiny. Musí být ekvivalentní?
2. Nalezněte spočetnou nekompaktní množinu v $\mathcal{C}[0,1]$. Můžete ji volit uzavřenou a omezenou?
3. Je prostor $(0,1)$ úplný? Existuje na něm ekvivalentní metrika, ve které je úplný?
4. Existuje na $[0,1]$ ekvivalentní metrika, v níž tento prostor není omezený?
5. Existuje na $\mathbb{R}$ ekvivalentní metrika, ve které není úplný? A co na $[-1,1]$?
6. Existuje na $\mathbb{R}$ ekvivalentní metrika, ve které je úplný a omezený? Můžeme požadovat totální omezenost?
7. Dokažte, že následující množina je kompaktní, $M = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty} \in \ell_2; |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$.
8. Ukažte, že prostor ℓ_2 je separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.
9. Dokažte, že sjednocení konečně mnoha řídkých množin je řídká množina.

V. Metrické prostory počtvrté

1. Dokažte, že $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou je separabilní. Je každá podmnožina $\mathbb{R}$ separabilní?
2. Dokažte, že součin konečně mnoha separabilních prostorů je separabilní. Jak je to pro spočetně mnoho (např. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ s metrikou $\rho(x,y) = \sum \frac{1}{2^k}\min(|x_k-y_k|,1)$)?
3. Dokažte, že $\mathcal{C}[0,1]$ je separabilní.
4. Nechť ρ je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^2$, σ taková metrika na $\mathbb{R}^2$, že existují $c, C > 0$, že pro každé $x,y \in \mathbb{R}^2$ platí $c\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq C\rho(x,y)$, a $a \in \mathbb{R}^2$ je libovolné. Lze funkce $f(x) = \frac{\sigma(x,a)}{\rho(x,a)}$ a $g(x) = (\sigma(x,a))^{\rho(x,a)}$ spojitě rozšířit na celou rovinu?

VI. Zkoumejte existenci a hodnotu parciálních derivací a diferenciálu (ev. spojitě dodefinované, lze-li to udělat) funkce $f(x,y) =$

1. $\sqrt{x^2+y^2}$ **2.** $\sqrt[3]{x+y^2}$ **3.** $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ **4.** $\sqrt[3]{x^2+y}\cdot\ln(x^2+y^2)$ **5.** $|x|\cdot|y|$ **6.** $\sqrt[3]{xy}$

7. $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ **8.** $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ **9.** $e^{\frac{-1}{x^2+y^2+xy}}$ **10.** $\frac{x^2y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}$

11. Nechť $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Spočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Spočtěte přibližně tak, že nahradíte přírůstek vhodné funkce jejím diferenciálem

12. $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{1.05^3}}}$ **13.** $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$ **14.** $0.97^{1.05}$ **15.** $1.04^{2.02}$ **16.** $1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3$

17. $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$

VII. Funkce více proměnných – derivace, složené funkce

1. Spočtěte $\delta f((1,1,1),v)$, kde $v = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ a $f(x,y,z) = x^y + y^z$.

2. Nechť $f(s,t)$ je kladná funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce g pomocí hodnot a derivací funkce f, pokud je (a) $g(x,y) = f(x,y)^{f(x,y)}$, b) $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$.

3. Nechť f má diferenciál v bodě $(1,1)$ a nechť $f(1,1) = f_1'(1,1) = 1$, $f_2'(1,1) = 2$. Položme $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1)$.

4. Nechť $f(r,\varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, funkce g má diferenciál v bodě $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial r}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial\varphi}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) = 4$. Spočtěte $g_1'(1,1)$, $g_2'(1,1)$.

5. Převeďte do polárních souřadnic rovnici a) $x\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + y\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

***6.** Převeďte do sférických souřadnic rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

7. Transformujte do polárních souřadnic rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}$ (t.j. napište odpovídající rovnici pro $r = r(\varphi)$).

8. Spočítejte směrové derivace normy ve všech bodech prostoru a) c_0, *b) $\mathcal{C}[0,1]$, c) ℓ^2, a charakterizujte body, v nichž má norma diferenciál (resp. Gâteauxovu derivaci).

9. Nechť X je normovaný lineární prostor. Co lze říci o derivaci normy v bodě 0? A co pro funkci $f(x) = \|x\|^2$?

Test číslo II/1 – první verze

1. Nechť $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^{1+\alpha}}{x^2+y^2} & \text{má-li tento výraz smysl,} \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ kde $\alpha\in\mathbb{R}$ je parametr.

a) Určete, pro která α je f spojitá v bodě $(0,0)$. (8 bodů)

b) Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pro všechna α, pro něž tyto derivace existují. (6 bodů)

c) Určete, pro která α má f v bodě $(0,0)$ diferenciál. (8 bodů)

Řešení. Označme $\beta = 1+\alpha$. Pokud $\beta\geq 0$, je f definována na celé rovině, pokud $\beta < 0$, není definována na osách (s výjimkou počátku, kde je dodefinována dle zadání).

a) Aby f byla spojitá v $(0,0)$, musí být definována na nějakém okolí $(0,0)$, tedy nutně $\beta\geq 0$. Pak, protože víme, že $|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, platí

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\beta}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^\beta}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^{\beta-1}}{2^\beta},$$

což má zřejmě limitu 0, pokud $\beta > 1$.

V případě, že $\beta \le 1$, spočtěme limitu po přímce $y = x$, tedy

$$f(x,x) = \frac{|x|^{2\beta}}{2x^2} = \frac{|x|^{2(\beta-1)}}{2},$$

což pro $x \to 0$ má limitu $\frac{1}{2}$, pokud $\beta = 1$ a $+\infty$, pokud $\beta < 1$. Odtud plyne, že f je spojitá v $(0,0)$, právě když $\beta > 1$ (tj. $\alpha > 0$).

b) Protože pro $\beta < 0$ není f definována na osách (s výjimkou $(0,0)$), nemá smysl pro tato β mluvit o parciálních derivacích v počátku. Pokud $\beta = 0$, je $f(x,0) = \frac{1}{x^2}$, což nemá derivaci v 0 (neboť to tam, jakožto funkce jedné proměnné, má nekonečnou limitu). Podobně pro $f(0,y)$. Pokud $\beta > 0$, pak $f(x,0) = f(0,y) = 0$ pro všechna x, y, a tedy zřejmě parciální derivace jsou nulové.
Shrnutí: Pro $\beta > 0$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, pro $\beta \le 0$ žádná z derivací neexistuje.

c) Má-li f diferenciál, musí mít parciální derivace, tedy $\beta > 0$, a podle části b) je diferenciál nulový. Přitom nulové zobrazení je diferenciálem, platí-li rovnost

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{|xy|^\beta}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Stejně jako v a) dokážeme, že

$$\frac{\frac{|xy|^\beta}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\beta-\frac{3}{2}}}{2^\beta},$$

a tedy pro $\beta > \frac{3}{2}$ skutečně je příslušná limita nulová a pro $\beta \le \frac{3}{2}$ limita pro $y = x$ nulová nevyjde.
Shrnutí: f má diferenciál v $(0,0)$, právě když $\beta > \frac{3}{2}$.

2. Nechť diferencovatelné funkce $r(x,y)$ a $\phi(x,y)$ splňují rovnice $x = e^r \cos\phi$, $y = e^{7r}\sin\phi$. Vyjádřete $\frac{\partial r}{\partial x}$ a $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ pomocí hodnot funkcí r a ϕ. (14 bodů)

Řešení. Obě rovnice zderivujme podle x a dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 =& e^r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos\phi - e^r \sin\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 0 =& 7e^{7r}\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin\phi + e^{7r}\cos\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} e^{-r} =& \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos\phi - \sin\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 0 =& 7\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin\phi + \cos\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Pokud první rovnici vynásobíme $\cos\phi$, druhou $\sin\phi$ a sečteme, dostaneme

$$e^{-r}\cos\phi = \frac{\partial r}{\partial x}(\cos^2\phi + 7\sin^2\phi),$$

tedy

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{e^{-r}\cos\phi}{1 + 6\sin^2\phi}.$$

Pokud od $7\sin\phi$-násobku první rovnice odečteme $\cos\phi$-násobek druhé rovnice, dostaneme analogicky jako výše

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-7e^{-r}\sin\phi}{1 + 6\sin^2\phi}.$$

3. Převeďte do polárních souřadnic rovnici $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. (14 bodů)

Řešení. Převedení do polárních souřadnic znamená zavedení nové funkce v, která splňuje $v(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Pak pro parciální derivace platí vztah:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\phi\\ \frac{\partial v}{\partial \phi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin\phi) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\cos\phi,\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\phi\\ \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\phi.\end{aligned}$$

Vyjádříme-li z těchto dvou rovnic $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$, dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}\cdot\sin\phi, \text{ a}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}\cdot\cos\phi.\end{aligned}$$

Dosazením spočítáme

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = r\cos\phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}\cdot\sin\phi\right) + r\sin\phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}\cdot\cos\phi\right) = r\cdot\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Tedy naše rovnice v polárních souřadnicích má tvar $r\frac{\partial v}{\partial r} = 0$, neboli $\frac{\partial v}{\partial r} = 0$ (protože $r > 0$).

Test číslo II/1 – druhá verze

1. Nechť $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^{1-\alpha}}{x^2+y^2} & \text{má-li tento výraz smysl,}\\ 0 & (x,y) = (0,0),\end{cases}$ kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

a) Určete, pro která α je f spojitá v bodě $(0,0)$. (8 bodů)

b) Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pro všechna α, pro něž tyto derivace existují. (6 bodů)

c) Určete, pro která α má f v bodě $(0,0)$ diferenciál. (8 bodů)

Řešení. Položme $\beta = 1 - \alpha$ a pokračujme jako v první verzi.

2. Nechť diferencovatelné funkce $r(x,y)$ a $\phi(x,y)$ splňují rovnice $x = e^r \cos\phi$, $y = e^{7r}\sin\phi$. Vyjádřete $\frac{\partial r}{\partial y}$ a $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ pomocí hodnot funkcí r a ϕ. (14 bodů)

Řešení. Stejné jako v první verzi, jen se derivuje podle y.

$$\begin{aligned} 0 =& e^r \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \cos\phi - e^r \sin\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ 1 =& 7e^{7r} \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin\phi + e^{7r}\cos\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \cos\phi - \sin\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ e^{-7r} =& 7\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin\phi + \cos\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} =& \frac{e^{-7r}\cos\phi}{1+6\sin^2\phi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} =& \frac{-7e^{-7r}\sin\phi}{1+6\sin^2\phi}. \end{aligned}$$

3. Převeďte do polárních souřadnic rovnici $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. (14 bodů)

Řešení. Stejně jako v první verzi vyjádříme $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}$ a dosadíme

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = r\cos\phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}\cdot\cos\phi\right) - r\sin\phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}\cdot\sin\phi\right) = \frac{\partial v}{\partial \phi},$$

tedy naše rovnice má v polárních souřadnicích tvar $\frac{\partial v}{\partial \phi} = 0$.

- -

VIII. V následujících úlohách zjistěte sup a inf funkce na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na M nabývá.

1. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z; M = [-1;1]\times[-1;1]\times[-1;1]$;
2. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a>0, b>0; M = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}$;
3. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z; M = \mathbb{R}^3$; **4.** $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}; M = \mathbb{R}^2$;
5. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; |x|+|y|\le 1\}$
6. $f(x,y) = (x+y)\,e^{-2x-3y}; M = \{(x,y); x>0, y>0\}$

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí v uvedených oblastech:

7. $f(x,y) = x^4+y^4-x^2-2xy-y^2; M = \mathbb{R}^2$
8. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}; M = \{(x,y); x>0; y>0\}$
9. $z(x,y) = x^2y^3(6-x-y); M = \{(x,y); x>0; y>0\}$
10. $z(x,y) = x^2y^3(6-x-y); M = \mathbb{R}^2$
11. $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, M = \{(x,y,z); x>0, y>0, z>0\}$.
12. $f(x,y,z) = x^4 - y^4 - x^2 - 2xy - y^2, \quad M = \mathbb{R}^2$
13. Dokažte, že funkce $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ nabývá lokálního maxima v nekonečně mnoha bodech, avšak lokálního minima ani v jednom bodě.

IX. Zjistěte, zda uvedené posloupnosti funkcí konvergují stejnoměrně na zadaných intervalech:

1. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in < 0, 1 >$, **2.** $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in < 0, 1 >$
3. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $x \in (0, +\infty)$ **4.** $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, $x \in < 0, 1 >$
5. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $a)\, x \in < 0, 1-\varepsilon >$, $b)\, x \in < 1-\varepsilon, 1+\varepsilon >$, $c)\, x \in < 1+\varepsilon, +\infty)$, kde $\varepsilon \in (0,1)$
6. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $a)\, x \in < 0, 1 >$, $b)\, x \in (1, +\infty)$ **7.** $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$
8. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $x \in (0, +\infty)$, **9.** $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$,
10. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

X. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností a řad

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{1+k^5x^2}$ **2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{k \log^2 k}\right)$ **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$ **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$
5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ **6.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin kx}{\sqrt{k+x}}$ **7.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \operatorname{arctg}(kx+k)$ **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^x}$, kde $a_k \in \mathbb{R}$
9. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$
10. Dokažte, že $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou f'' na $(0, 2\pi)$.
11. Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ je $\mathcal{C}^\infty$ na $(1, \infty)$.
12. Nechť $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^p + x^2 k^q}$, kde $p, q \geq 0$. Dokažte, že
(i) f je spojitá na $(0, \infty)$, pokud $\max(p,q) > 1$, (ii) f je spojitá na $\mathbb{R}$, pokud $p + q > 2$.
13. V kterých bodech má derivaci funkce (a) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ (b) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$

Test číslo II/2 – první verze

1. Nechť $f(x,y) = (x - 5y)e^{y-x}$ a $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \&\ y < 0\}$. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

Řešení. Pro každé $(x,y) \in M$ zřejmě platí $f(x,y) > 0$. Navíc funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, a tedy $\inf f(M) = \inf f\left(\overline{M}\right)$. Avšak $\overline{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \ \&\ y \leq 0\}$ a zřejmě $\min f\left(\overline{M}\right) = 0$, a tedy $\inf f(M) = 0$ a f tohoto infima nenabývá.
Nyní hledejme supremum. Opět platí $\sup f(M) = \sup f\left(\overline{M}\right)$. Přitom pro každé $(x,y) \in \overline{M}$ platí

$$f(x,y) \leq 5(x-y)e^{y-x}.$$

Uvažujme pomocnou funkci $\varphi(t) = 5te^{-t}$. Víme, že φ je spojitá na $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$ a $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$, a tedy φ je omezená na $[0, +\infty)$. A protože pro $(x,y) \in \overline{M}$ platí $x - y \geq 0$ a $f(x,y) \leq \varphi(x-y)$ (viz výše), je f na $\overline{M}$ omezená, a tedy $s = \sup f\left(\overline{M}\right) \in (0, +\infty)$. Nyní využijme ještě jednou toho, že $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. Pak totiž existuje $T > 0$ takové, že pro $t > T$ máme $\varphi(t) < \frac{s}{2}$, a tedy speciálně dostaneme

$$\sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \overline{M} \ \&\ x - y > T\} \leq \frac{s}{2}.$$

Nyní, množina $\{(x,y) \in \overline{M} \mid x - y \leq T\}$ je kompaktní, a tedy spojitá funkce f na ní nabývá svého maxima. Toto maximum musí být s, a tedy f nabývá na $\overline{M}$ svého maxima. Tudíž stačí vyšetřit všechny „podezřelé body“.

Nejprve najděme podezřelé body v M. Protože M je otevřená, f by v bodě extrému měla nulové parciální derivace. Ale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - x + 5y)e^{y-x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (-5 + x - 5y)e^{y-x},$$

a ty nemohou být obě nulové. (Jinak by totiž platilo $1 = x - 5y = 5$.) Tedy na M funkce f extrémů nenabývá.
Nyní se podívejme na hranici M. Tu tvoří dvě poloosy. První je určena $x = 0, y \leq 0$. Přitom $f(0, y) = -5ye^y$. Derivace této funkce (jedné proměnné) je $-5e^y(y + 1)$, a ta je nulová jedině v bodě $y = -1$, a tedy dostáváme podezřelý bod $(0, -1)$, pro který platí $f(0, -1) = 5e^{-1}$. Pro druhou poloosu postupujme analogicky. $f(x, 0) = xe^{-x}$, derivace je $e^{-x}(1-x)$, což je nulové právě pro $x = 1$. Dostáváme druhý podezřelý bod $(1, 0)$, pro který $f(1, 0) = e^{-1}$. Konečně, poslední podezřelý bod je krajní bod obou poloos $(0, 0)$, ale v něm je $f(0, 0) = 0$. Tedy docházíme k závěru, že

$$\sup f(M) = \frac{5}{e}, \quad \text{a suprema se nenabývá.}$$

2. Najděte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy \log\left(2x^2 + y^2\right)$.
Řešení. f je definovaná na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, což je otevřená množina, na níž je f spojitá a má spojité parciální derivace všech řádů. Proto, jestliže má v nějakém bodě lokální extrém, musí v něm být obě parciální derivace nulové. Nejdříve je spočtěme.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \log\left(2x^2 + y^2\right) + xy \cdot \frac{4x}{2x^2 + y^2} = y\left(\log\left(2x^2 + y^2\right) + \frac{4x^2}{2x^2 + y^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \log\left(2x^2 + y^2\right) + xy \cdot \frac{2y}{2x^2 + y^2} = x\left(\log\left(2x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{2x^2 + y^2}\right)$$

Každá z nich je součinem dvou výrazů, a tak, mají-li být obě nulové, jsou čtyři možnosti:

(*i*) $x = y = 0$

(*ii*) $x = 0$ & $\log\left(2x^2 + y^2\right) + \frac{4x^2}{2x^2+y^2} = 0$

(*iii*) $y = 0$ & $\log\left(2x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{2x^2+y^2} = 0$

(*iv*) $\log\left(2x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{2x^2+y^2} = 0$ & $\log\left(2x^2 + y^2\right) + \frac{4x^2}{2x^2+y^2} = 0$

Možnost (i) nemůže nastat, protože bod $(0, 0)$ nepatří do definičního oboru. Z možnosti (ii) dostaneme $\log y^2 = 0$, neboli $y^2 = 1$, což vede ke dvojici podezřelých bodů $(0, 1)$ a $(0, -1)$. Z možnosti (iii) dostáváme $\log(2x^2) = 0$, tedy dvojici bodů $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Zbývá vyšetřit možnost (iv).
Z ní plyne ihned (odečtením obou rovnic), že $\frac{4x^2}{2x^2+y^2} = \frac{2y^2}{2x^2+y^2}$, neboli $y^2 = 2x^2$. Dosaďme toto například do první rovnice, a vyjde nám

$$\begin{aligned} \log\left(2x^2 + 2x^2\right) + \frac{4x^2}{2x^2 + 2x^2} &= 0 \\ \log\left(4x^2\right) &= -1 \\ x^2 &= \frac{1}{4e} \end{aligned}$$

Podle předchozího pak platí $y^2 = \frac{1}{2e}$. Snadným dosazením ověříme, že skutečně rovnosti v možnosti (iv) platí, kdykoli $x^2 = \frac{1}{4e}$ a $y^2 = \frac{1}{2e}$. To dává čtyři podezřelé body $\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.
Abychom zjistili, ve kterých z podezřelých bodů jseu extrémy, vyšetříme druhý diferenciál. Spočtěme tedy druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\left(\frac{4x}{2x^2+y^2} + \frac{8x(2x^2+y^2) - 4x^2\cdot 4x}{(2x^2+y^2)^2}\right) = \frac{4xy}{2x^2+y^2}\cdot\left(1 + \frac{4y^2}{2x^2+y^2}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x\left(\frac{2x}{2x^2+y^2} + \frac{4y(2x^2+y^2) - 2y^2\cdot 2y}{(2x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2xy}{2x^2+y^2}\cdot\left(1 + \frac{4x^2}{2x^2+y^2}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \log\left(2x^2+y^2\right) + \frac{4x^2}{2x^2+y^2} + y\left(\frac{2y}{2x^2+y^2} + \frac{4x^2\cdot 2y}{(2x^2+y^2)^2}\right)\\
&= \log\left(2x^2+y^2\right) + 2 + \frac{8x^2y^2}{(2x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

V bodech $(0,1)$ a $(0,-1)$ má druhý diferenciál matici $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, což je zřejmě indefinitní (příslušná kvadratická forma je $(h_1,h_2) \mapsto 4h_1h_2$, takže například v bodě $(1,1)$ je kladná a v bodě $(-1,1)$ záporná). Takže v těchto bodech není extrém. V bodech $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ vyjde matice druhého diferenciálu stejně, a tak ani v těchto bodech není extrém.
V bodech $\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ má matice druhého diferenciálu tvar $\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, je tedy pozitivně definitní (determinant je 8, tedy kladný, a rovněž $3\sqrt{2} > 0$), v těchto bodech je tedy ostré lokální minimum. Jeho hodnota je v obou případech $-\frac{1}{2e\sqrt{2}}$.
V bodech $\left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ a $\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ má matice druhého diferenciálu tvar $\begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, je tedy negativně definitní (determinant je 8, tedy kladný, a přitom $-3\sqrt{2} < 0$), v těchto bodech je tedy ostré lokální maximum. Jeho hodnota je v obou případech $\frac{1}{2e\sqrt{2}}$.

3. Položme $f(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)\cdot \log k \cdot k^x}$. Dokažte, že funkce f je definována na nějakém okolí 0 a spočtěte $f'(0)$.
Řešení. Zřejmě platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k(k-1)\cdot\log k\cdot k^x}}{\frac{1}{k^{x+2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k(k-1)\log k} = 0,$$

a tak pro $x > -1$ řada, jíž je definována f, konverguje. Tudíž f je definována alespoň na $(-1, +\infty)$, tedy rozhodně na nějakém okolí 0. (Lze snadno ukázat, že pro jiná x řada nekonverguje, ale to nás v tomto příkladu nezajímá.) Chceme spočítat $f'(0)$, a tak zkusme, zda naši řadu lze derivovat člen po členu. Nejprve spočtěme derivaci k-tého členu.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{k(k-1)\cdot\log k\cdot k^x}\right)' &= \frac{1}{k(k-1)\cdot\log k}\cdot\left(\left(\frac{1}{k}\right)^x\right)' = \frac{1}{k(k-1)\cdot\log k}\cdot\log\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^x\\
&= \frac{-1}{k(k-1)\cdot k^x}.
\end{aligned}$$

Pokud $x \geq -\frac{1}{2}$, platí

$$\left|\frac{-1}{k(k-1)\cdot k^x}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{k}(k-1)},$$

přičemž řada $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k-1)}$ konverguje, a tedy řada derivací $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k(k-1)\cdot k^x}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $(-\frac{1}{2}, +\infty)$. A tedy na tomto intervalu platí

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k(k-1)\cdot k^x}.$$

(Tato rovnost platí i na $(-1, +\infty)$, ale to nás nyní nezajímá.) Tedy

$$f'(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right) = -1.$$

Test číslo II/2 – druhá verze

1. Nechť $f(x,y) = (x-3y)e^{x-y}$ a $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \ \&\ y > 0\}$. Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

Řešení. Analogicky jako v první verzi je vidět, že $\sup f(M) = 0$ a tohoto suprema se nenabývá. S použitím nerovnosti

$$0 \geq f(x,y) \geq 3(x-y)e^{x-y}, \quad (x,y) \in \overline{M},$$

opět dokážeme, že f je na $\overline{M}$ omezená a nabývá tam svého minima. Zase nám vyjdou podezřelé body $(0,0)$, $(0,1)$ a $(-1,0)$, přičemž nejnižší hodnota $-\frac{3}{e}$ se nabývá v bodě $(-1,0)$. Tedy

$$\inf f(M) = -\frac{3}{e}, \qquad \text{hodnota se na } M \text{ nenabývá.}$$

2. Najděte všechny lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy\log\left(x^2 + 2y^2\right)$.

Řešení. Stejné jako v první verzi, se zaměněnými x a y.

3. Položme $f(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)\cdot \log k \cdot k^x}$. Dokažte, že funkce f je definována na nějakém okolí 0 a spočtěte $f'(0)$.

Řešení. Ze stejných důvodů jako v první verzi platí pro $x > -\frac{1}{2}$ rovnost

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k(k+1)\cdot k^x},$$

a tedy

$$f'(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$